INSTITUTO FRAY MAMERTO ESQUIÚ

ESCUELA SECUNDARIA SUPERIOR

MATEMÁTICA CICLO SUPERIOR

CUARTO AÑO

MATEMÁTICA 4

Prof. Gonzalo Iribarne (4º A)

Prof. Virginia Penedo (4º B)

Prof. Mailén García Boverio (4º C)

CICLO LECTIVO 2016

Mar del Plata, 9 de Marzo de 2016

Pautas de la materia. Ciclo lectivo 2016

- ☑ Cada alumno debe contar con una carpeta nº 3, o cuaderno nª 5 con hojas cuadriculadas, para ser destinado para uso EXCLUSIVO de la materia. Allí se encontrarán los aspectos teóricos, las explicaciones del docente y los ejercicios dados para resolver en clase. Debe estar completo/a y prolijo/a ya que puede ser requerida para ser visada y calificada en cualquier momento del año. Al final de la misma deberán tener un folio (de utilizar cuaderno se deberá pegar un sobre en la contratapa) para guardar las evaluaciones, trabajos prácticos y tareas corregidas por el docente. Estas últimas deberán ser entregadas cada vez que el docente lo solicite para su visado y corrección.
- ☑ Los alumnos serán evaluados en cada uno de los comportamientos de la clase. Para ello el docente cuenta con una planilla de observación personal donde serán registradas las actitudes positivas y negativas.
- ☑ Los alumnos serán calificados por su ACTITUD frente a la materia. La nota conceptual se promedia COMO UNA NOTA MÁS en la finalización del trimestre y es de **fundamental importancia**. Para informarle a los Sres. padres del desempeño global del alumno, se utilizarán planillas de seguimiento que se encuentran al final de este módulo.
- ☑ Cada alumno debe asistir a clase con sus elementos de trabajo (carpeta, calculadora, instrumentos de geometría, módulo, guías de trabajos prácticos). Los elementos son de uso personal y no podrán prestarse los días de evaluación, por lo que cada alumno **debe ser previsor** y contar con todo lo necesario antes de comenzar la misma. Dicho día nadie podrá pedir a ningún compañero ni salir del aula a pedir ningún elemento. (Ver pautas para evaluaciones)
- ☑ El alumno que no asista a clase por algún motivo determinado, tiene la OBLIGACIÓN de notificarse de lo trabajado en dicho día. NO ES EXCUSA NO TRAER LAS TAREAS COMPLETAS POR HABER FALTADO. En caso de incumplimiento será calificado con la nota correspondiente.
- ☑ Los alumnos que por viajes familiares se ausentasen durante un determinado período, deberán asumir la responsabilidad de ponerse al día con los temas vistos durante ese tiempo. Esto incluye copiar lo explicado y resolver en las tareas asignadas. Bajo ningún concepto se responderán dudas si no se cumplen previamente las cuestiones mencionadas.

- ☑ En caso de ausentarse el día que se tome evaluación escrita, los alumnos deberán concurrir a la clase inmediata posterior con el certificado o nota (ver modelo), que explique el motivo de su ausencia. Dependiendo del caso, el docente pautará con el o los alumnos en la misma situación, el día en el que serán evaluados. Esta fecha será única. Cualquier ausencia no justificada en los plazos establecidos significa un 1 (uno) como calificación. Podrán utilizar el siguiente modelo de nota. Podrá ser redactada a mano (NO POR LOS ALUMNOS) pero no podrán faltar los datos de quien la redacta, con forma, aclaración y DNI.

Sra. Profesora ……………………………………………..:

Me comunico por este medio para informarle que mi hijo/a ……………………………………………… no ha concurrido a la **evaluación de matemática** del día …………………………… por los motivos que se detallan a continuación:

- ☑
- ☑
- ☑

Se adjunta a la nota, el certificado correspondiente.

Solicito tenga a bien reprogramar la fecha. Sin más que agregar, saluda atte.

- ☑ Las evaluaciones serán corregidas y entregadas dentro de las 2 (dos) semanas posteriores a su realización. El alumno no puede preguntar por su corrección antes de cumplido dicho plazo.
- ☑ En todos los casos que se considere necesario, luego de la corrección de una evaluación escrita, el docente podrá solicitar al alumno la defensa oral de algún ítem que esté poco claro o que requiera ser revisado. Esta instancia podrá definir la calificación final de la evaluación.
- ☑ Los alumnos serán evaluados en forma escrita a través de evaluaciones cortas (parcialitos) y evaluaciones sumativas (como cierre de la unidad).
- ☑ Los alumnos deben llegar puntales al aula luego del recreo. El alumno que se retrase más de cinco minutos de la finalización del mismo, tendrá un apercibimiento en la planilla. Los tres apercibimientos significarán una baja en el promedio trimestral.
- ☑ **Bajo ningún concepto** los alumnos podrán salir del aula.

- ☑ Se encuentra prohibido el uso del celular durante la clase, excepto para fines pedagógicos en actividades previamente acordadas por el docente. Todo uso indebido del mismo traerá aparejada su correspondiente sanción.
- ☑ Es responsabilidad del alumno informar al docente si la planilla de calificaciones del cuaderno de comunicaciones se encuentra incompleta.
- ☑ Si existieran casos de indisciplina el docente decidirá la ubicación de los alumnos en la clase de matemática.
- ☑ Los padres que deseen tener una entrevista con la docente deberán solicitarla por escrito mediante el cuaderno de comunicaciones. Una vez contestada la nota por la docente deberán confirmar asistencia. En caso de no poder concurrir deberán informar por el mismo medio o telefónicamente con una antelación no menor a 24 horas de la fecha y horario pautados.

…………………………………………………………….	………………………………	………………………………
FIRMA PADRE/ MADRE O TUTOR	FIRMA ALUMNO	FIRMA DOCENTE

Pautas para las evaluaciones

Las siguientes pautas rigen para todas las instancias de evaluación escrita, ya sean trabajos prácticos evaluativos o evaluaciones formales.

- ☑ El examen se aprueba con 7 (siete) puntos.
- ☑ Los materiales de trabajo son de uso personal, es decir, **NO** se comparten.
- ☑ El examen debe resolverse íntegramente en tinta azul o negra. Lo resuelto en lápiz será ignorado.
- ☑ Los ejercicios deben contar con la lista de cálculos auxiliares al lado de cada resolución, o su correspondiente justificación. **Cualquier respuesta no justificada carece de validez y no se puntúa.**
- ☑ Se responderán las dudas referidas exclusivamente a la consignas. No se responden dudas referidas a contenidos.
- ☑ En caso de que el docente lo considere necesario se llamará a los alumnos a defender sus producciones en una instancia oral.
- ☑ No se permite el uso de corrector. En caso de cometer algún error de debe anular el ejercicio y continuar resolviendo.
- ☑ Los incisos de resolución deben estar debidamente indicados. No está permitido alterar el orden de resolución. En caso de no saber resolver algún ítem, debe dejarse el espacio en blanco.
- ☑ En las evaluaciones que posean espacios para completar, las respuestas deben estar consignadas en dichos espacios
- ☑ Las respuestas deben estar remarcadas y siempre expresadas en su forma más simplificada. Dependiendo del caso se descontará puntaje por resultar incompleta la resolución.
- ☑ Cualquier actitud indebida durante el examen será motivo de anulación del mismo y su calificación será 1(uno).

  Al momento de corregir:

  B^-: (bien menos) se descuenta un 25% del puntaje del inciso
  R : (regular) se descuenta un 50% del puntaje del inciso
  R^-: (regular menos) se descuenta un 75% del puntaje del inciso

FIRMA ALUMNO: ……………………………………………………………

PROGRAMA DE EXAMEN

1) *Números Reales:*

→ *Conjuntos numéricos*
→ *Propiedades de los números reales.*
→ *Intervalos reales. Operaciones con intervalos*
→ *Operaciones con radicales*
→ *Problemas con números reales*
→ *Intervalos e inecuaciones*
→ *Concepto de distancia. Valor absoluto o módulo*
→ *Ecuaciones e inecuaciones con módulo*
→ *Aproximaciones y errores*

2) *Sucesiones*

→ *Termino general de una sucesión*
→ *Algunas sucesiones especiales*

3) *Concepto de funciones*

→ *Análisis completo del gráfico de una función: dominio, imagen, conjunto de positividad, de negatividad, intervalos de crecimiento y decrecimiento, intersecciones con los ejes coordenados*
→ *Relaciones entre conjuntos*
→ *Función como relación entre conjuntos: existencia y unicidad*
→ *Formulas y gráficos*
→ *Lectura de gráficos y cálculo del dominio de diferentes tipos de funciones en forma analítica*
→ *Funciones por tramos*
→ *Función racional, asíntotas*
→ *Funciones irracionales de índice par el impar*

4) *Funciones cuadráticas*

→ *La parábola*
→ *Ecuaciones cuadráticas y raíces*
→ *Distintas expresiones de la función cuadrática: forma polinómica, forma canónica, forma factorizada.*
→ *Análisis completo de una función cuadrática: ordenada al origen, raíces, eje de simetría, vértice, dominio, imagen, conjunto de positividad, conjunto de negatividad, intervalos de crecimiento y decrecimiento*
→ *Análisis del signo del discriminante*
→ *Problemas con ecuaciones cuadráticas*

→ *Sistemas de ecuaciones mixtos*

5) ***Polinomios***

→ *Monomios. Operaciones entre monomios*
→ *Definición de polinomios. Términos. Coeficientes. Grado.*
→ *Operaciones entre polinomios: adición, sustracción, multiplicación y división.*
→ *Regla de Ruffini. Teorema del resto.*
→ *Raíces de un polinomio: Multiplicidad.*
→ *Teorema de Gauss. Regla de Ruffini*
→ *Casos de factoreo: factor común, factor común por grupos, diferencia de cuadrados, trinomio cuadrado perfecto, cuatrinomio cubo perfecto.*
→ *Factoreo de polinomios*

6) ***Semejanza de figuras planas***

→ *Semejanza de triángulos*

7) ***Teorema de Thales***

8) ***Trigonometría***
→ *Razones trigonométricas de un ángulo agudo.*
→ *Resolución de triángulos rectángulos.*
→ *Problemas*
→ *Razones trigonométricas de ángulos obtusos*

9) ***Combinatoria***
10) ***Binomio de Newton***

11) ***Probabilidad***
→ *Espacio muestral.*
→ *Sucesos incompatibles e independientes.*
→ *Probabilidad condicional*

Símbolos

Símbolo	Significado
$=$	igual
$<$	menor que...
$\leq$	menor o igual que...
$>$	mayor que...
$\geq$	mayor o igual que...
$\neq$	distinto
$\approx$	aproximadamente igual
$\equiv$	idénticamente igual
$\pm, \mp$	más menos / menos más
Σ	sumatorio
Π	producto
$\forall$	para todo, cuantif. universal
$\exists$	existe, cuantif. existencial
$\Rightarrow$	implica (si...entonces...)
$\Leftrightarrow$	equivale (si y solo si)
$/$	tal que
$\therefore$	por lo tanto, por consiguiente
$\because$	porque, puesto que
$\neg$	negación
$\wedge$	conjunción ("y", "además")
$\vee$	disyunción ("o")
∞	infinito
$:$	razón
$::$	proporción

Símbolo	Significado
$\mathbb{N}$	conjunto de los números naturales
$\mathbb{Z}$	conjunto de los números enteros
$\mathbb{Q}$	conjunto de los números racionales
$\mathbb{R}$	conjunto de los números reales
$\mathbb{C}$	conjunto de los números complejos
$\mathbb{R}^+$	conjunto de los reales positivos
$\{a,b,\ldots\}$	conjunto de elementos a,b,...
$\varnothing$	conjunto vacio
$\cap, \bigcap$	intersección de conjuntos
$\cup, \bigcup$	unión de conjuntos
$\subset$	incluido en el conjunto
$\not\subset$	*no* incluido en el conjunto
$\in$	pertenece a un conjunto
$\notin$	*no* pertenece a un conjunto
$A \setminus B,\ A - B$	conjunto diferencia
$\wp(A)$	conjunto de partes
$n(A)$	cardinal del conjunto
$A',\ \overline{A}$	conjunto complementario de A
$A \times B$	producto cartesiano
$\{x \mid x \in P\}$	todos los x que satisfacen P
$\{x : \ldots\}$	todos los x tales que ... es cierto
(a,b)	intervalo abierto
$[a,b]$	intervalo cerrado
$[a,b),(a,b]$	intervalo semiabierto
$(a,\infty),[a,\infty)$	semirrecta derecha
$(-\infty,a),(-\infty,a]$	semirrecta izquierda
$(-\infty,\infty)$	recta real

Símbolo	Significado
$n!$	factorial
$\lvert x \rvert$	valor absoluto
$\sqrt{\ }$	raíz cuadrada
$\%$	tanto por ciento
‰	tanto por mil
π	número pi, $\pi = 3{,}1415\ldots$
e	número e, $e = 2{,}7182\ldots$
ϕ	número fi (áureo), $\phi = 1{,}6180\ldots$
$\parallel$	paralelo
$\perp$	perpendicular
$\measuredangle$	ángulo
$\binom{m}{n}$	número combinatorio
C_m^n	Combinaciones
P_m	permutaciones
V_m^n	variaciones
$\log$	logaritmo decimal
$\log_a$	logaritmo de base a
$\ln$	logaritmo neperiano (base e)
$\sin\alpha$	seno de α
$\cos\alpha$	coseno de α
$\tan\alpha$	tangente de α
$\cot\alpha$	cotangente α
$\sec\alpha$	secante α
$\csc\alpha$	cosecante α
(a_n)	sucesión con término n-ésimo
Δ	incremento
σ	desviación típica

Math Quick Reference Card – SÍMBOLOS 1.0 – (cc) www.3con14.com

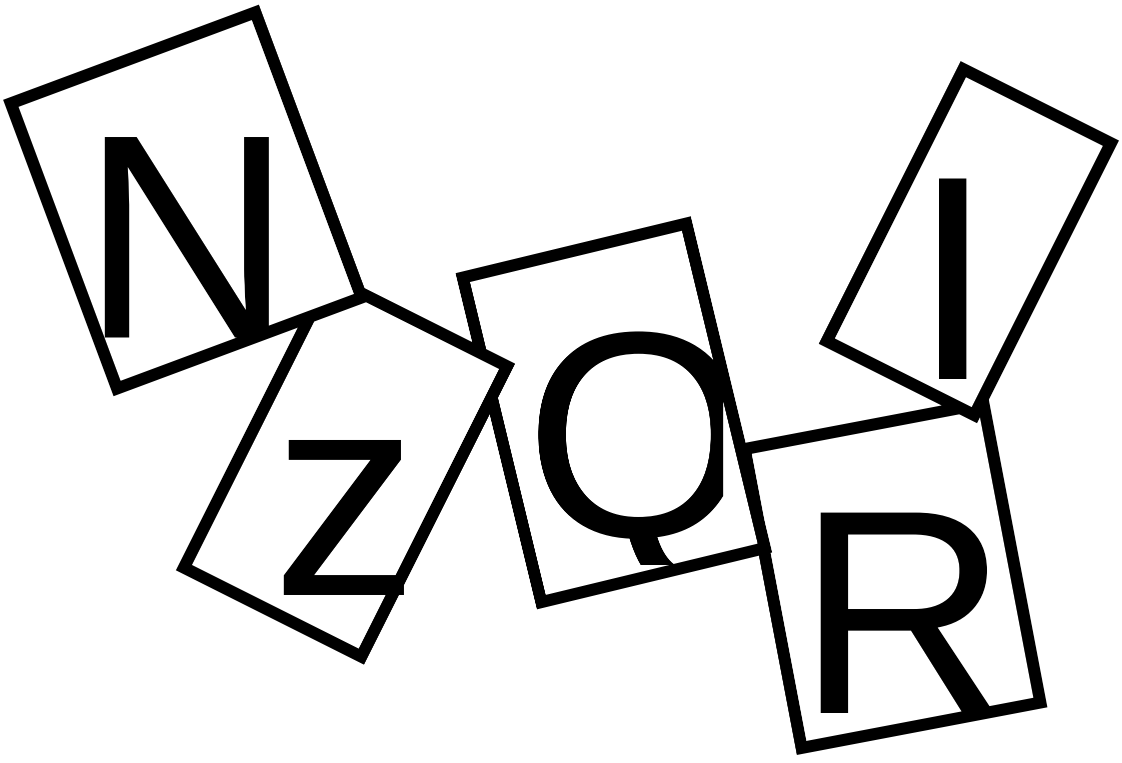
Propiedades:

POTENCIACION
$a^0 = 1;\quad a \in \mathcal{R}$
$a^1 = a;\quad a \in \mathcal{R}$
$a^n . a^m = a^{n+m};\quad a \in \mathcal{R} \wedge n,m \in \mathcal{Z}$
$\frac{a^n}{a^m} = a^{n-m};\quad a \in \mathcal{R} \wedge n,m \in \mathcal{Z}$
$(a.b)^n = a^n . b^n;\quad a \in \mathcal{R} \wedge n \in \mathcal{Z}$
$(a^n)^m = a^{n.m}.;\quad a \in \mathcal{R} \wedge n,m \in \mathcal{Z}$
$\sqrt[m]{a^n} = a^{\frac{n}{m}};\quad a \in \mathcal{R} \wedge n,m \in \mathcal{Z}$
$a^{-n} = \frac{1}{a^n};\quad a \in \mathcal{R} \wedge n \in \mathcal{Z}$
$(a \pm b)^n = a^n \neq b^n;\quad a,b \in \mathcal{R} \wedge n \in \mathcal{Z}$

RADICACION
$\sqrt[n]{a} . \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a.b};\quad a,b \in \mathcal{R}^+ \wedge n \in \mathcal{N}$
$\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}};\quad a,b \in \mathcal{R}^+ \wedge n \in \mathcal{N}$
$(\sqrt[n]{a})^m . = \sqrt[n]{a^m};\quad a \in \mathcal{R}^+ \wedge n,m \in \mathcal{N}$
$\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} . = \sqrt[m.n]{a};\quad a \in \mathcal{R}^+ \wedge n,m \in \mathcal{N}$
$\sqrt[n]{a \pm b} \neq \sqrt[n]{a} \pm \sqrt[n]{b};\quad a,b \in \mathcal{R}^+ \wedge n \in \mathcal{N}$

Unidad 1

Numeros Reales

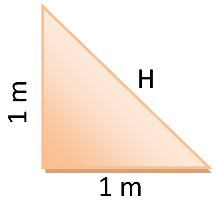


Números Reales

Eje temático: números y operaciones

Números Irracionales

¿Cuánto mide la hipotenusa de este triángulo rectángulo?



Utilizando el Teorema de Pitágoras:

$H^2 = (1m)^2 + (1m)^2$

$H = \sqrt{2}m$

Ahora bien, si utilizamos una calculadora científica para hallar $\sqrt{2}$, obtenemos $1{,}414213562$. Si ese fuese el valor exacto de $\sqrt{2}$, al borrar el visor, volver a ingresar $1{,}414213562$ y elevarlo al cuadrado, debería dar 2. Sin embargo, el valor que se obtiene es $1{,}999999999$. Por lo tanto; $1{,}414213562 \neq \sqrt{2}$, sino que es un valor aproximado de este número.

En Internet pueden obtenerse más cifras decimales de $\sqrt{2}$, por ejemplo:

$$1{,}4142135623730950488016887242096980785696718753769480731$$

Y como puede observarse, en el desarrollo decimal no ocurre que un grupo de cifras se repita una y otra vez, o sea que no es un número periódico, por lo tanto no es racional. ***Es un número irracional***.

Los números irracionales no pueden escribirse como fracción, por lo tanto, no tienen un número finito de cifras decimales ni un período que se repita, o sea los números irracionales tienen **infinitas cifras no periódicas**

Aclaración: no son números decimales, sino que tienen una representación decimal.

Son irracionales todas las raíces de cualquier índice que no den por resultado un entero. También son irracionales todos los números que se obtienen al operar (sumar, restar, multiplicar o dividir) números irracionales con racionales.

¡Nota Importante!

- ✓ No siempre la suma de dos números irracionales es otro número irracional.
  Ejemplo: $-\sqrt{2} + \sqrt{2} = 0 \in \mathbb{Q}$
- ✓ No siempre el producto de dos números irracionales es otro número irracional.
  Ejemplo: $\sqrt{5}\,.\sqrt{5} = 5 \in \mathbb{Q}$

Algunos números están definidos a través de una "ley de formación" que puede deducirse de la observación de los mismos. Por ejemplo:

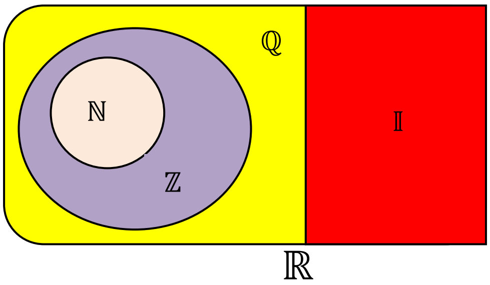
a) 0,12345678910111213………………
b) 3,10110011100011110000………..
c) 2,313233343536373839310311312………..
d) 26,2468101214………………………

e) 15,248163264………………………..

El Conjunto de los números Reales

El Conjunto de los números reales ($\mathbb{R}$) está formado por el conjunto de los números racionales ($\mathbb{Q}$) y el de los irracionales ($\mathbb{I}$). En símbolos: $\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup \mathbb{I}$

Gráficamente:



De este modo, podemos hablar de completitud de la recta numérica: cada punto de la recta representa un número real, y todo número real está representado en la recta.

Radicación.

Raíz n-ésima de un número

Definición:

Dado un número real **a** y un entero positivo **n**, se llama raíz **n-ésima** de **a,** a otro número real **b,** tal que, **b** elevado a **n** es igual a **a.**

En símbolos: $\sqrt[n]{a} = b \iff b^n = a \quad (n > 0)$

Casos particulares:

- $Si\ n\ es\ par\ y\ a \geq 0 \Rightarrow \sqrt[n]{a} = b\ \ y\ \ b \geq 0$
- $Si\ n\ es\ par\ y\ a < 0 \Rightarrow \sqrt[n]{a} = \nexists\ en\ \Re$
- $Si\ n\ es\ impar\ \ y\ a \in \Re \Rightarrow \sqrt[n]{a} = b\ \ y\ \ b \in \Re$

Propiedades de la Radicación

Lenguaje Formal	*Ejemplos*
1) Exponentes racionales $\left(\sqrt[n]{a}\right)^m = \sqrt[n]{a^m} = a^{m/n} \quad con\ a > 0,\ m, n \in \mathbb{N}$	1) $\left(\sqrt[3]{8}\right)^4 = \sqrt[3]{8^4} = 8^{4/3}$
2) Distributiva en multiplicación y división $\sqrt[n]{a}.\sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a.b} \quad con\ a, b > 0 \quad n \in \mathbb{N}$ $\dfrac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\dfrac{a}{b}}$	2) $\sqrt{4.5} = \sqrt{4}.\sqrt{5}$ $\sqrt[3]{\dfrac{64}{8}} = \dfrac{\sqrt[3]{64}}{\sqrt[3]{8}} = \dfrac{4}{2}$
3) Raíz de raíz $\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[n.m]{a}$	3) $\sqrt[3]{\sqrt{64}} = \sqrt[6]{64} = 2$
4) Simplificación de radicales • $Si\ n\ es\ par \Rightarrow \sqrt[n]{a^n} = \lvert a \rvert$ • $Si\ n\ es\ impar \Rightarrow \sqrt[n]{a^n} = a$	4) $Si\ n\ es\ par \quad \sqrt[6]{2^6} = \lvert 2 \rvert = 2$ $\sqrt[6]{(-2)^6} = \lvert 2 \rvert = 2$ $Si\ n\ es\ impar \quad \sqrt[3]{5^3} = 5$ $\sqrt[3]{(-5)^3} = -5$
5) Radicales equivalentes: Una raíz enésima positiva no varía si se multiplican o dividen por un mismo número el índice y el exponente del radicando. $\sqrt[n]{a^r} = \sqrt[n.m]{a^{r.m}} \quad con\ \ m, r > 0$ $\sqrt[n]{a^r} = \sqrt[n:m]{a^{r:m}} \quad con\ \ m, r > 0\ \ y\ m\ \ es\ divisor\ de\ n\ y\ r$	5) $\sqrt[5]{3^2.a^3} = \sqrt[5.2]{(3^2)^2.(a^3)^2} = \sqrt[10]{3^4.a^6}$ $\sqrt[9]{5^3.a^6} = \sqrt[9:3]{5^{3:3}.a^{6:3}} = \sqrt[3]{5.a^2}$

Extracción de factores fuera del radical

Teniendo en cuenta las propiedades de la radicación, pueden extraerse factores fuera del radical, cuando los factores que figuran en el radicando sean potencias de exponente mayor o igual que el índice de la raíz. En algunos casos es necesario factorear el radicando.

Por ejemplo:

$\sqrt[2]{8} = \sqrt[2]{2^3}$. Descomponer el ocho en factores primos.

$=$ ____________ . Descomponer el exponente en suma de potencias de igual base.

$=$ ____________ . Distribuir el radical en cada factor, y simplificar índice y exponente.

$=$ ___________ . El factor 2 queda fuera del radical y éste queda reducido a su mínima expresión.

¡Nota Importante!

Cuando aplicamos el procedimiento antes descripto, el número sigue siendo el mismo (por eso se utiliza el signo igual entre las expresiones); lo único que logramos es cambiar el aspecto, o sea la forma de expresarlo. Puede verificarse con la calculadora que:

$$\sqrt[2]{8} = 2.\sqrt{2} \cong 2{,}828427125 \ldots$$

Otros ejemplos:

$\sqrt[3]{81a^{14}} =$ ________________ = ______________________ = ____________________

$\sqrt[3]{a^6.b^2.c^{17}} =$ __________________ = _________________________

Radicales semejantes

> *Se llaman radicales semejantes a aquellos que tienen el mismo índice y el mismo radicando. Únicamente pueden diferir sus coeficientes.*

Por ejemplo:

$3\sqrt{2} \quad y \quad -5\sqrt{2} \quad son\ radicales\ semejantes;\ 3\ y -5\ son\ los\ coeficientes$

$-4a\sqrt[3]{b^2} \quad y \quad -4\sqrt[3]{b^2} \quad son\ radicales\ semejantes;\ \ -4a\ \ y-4\ son\ coeficientes\ pero\ \ distintos.$

$5\sqrt{a} \quad y \quad 5\sqrt[3]{a} \quad no\ son\ radicales\ semejantes, aunque\ sus\ coeficientes\ son\ iguales$

OPERACIONES CON NÚMEROS IRRACIONALES

Adición y sustracción (Suma algebraica)

La suma algebraica de números irracionales semejantes, es otro irracional semejante a los dados, cuyo coeficiente es la suma algebraica de los coeficientes de cada uno de ellos.

Ejemplos:

$$a)\quad \underbrace{3\sqrt{2}+\frac{5}{4}\sqrt{2}-\sqrt{2}+\frac{1}{2}\sqrt{2}-4\sqrt{2}}_{\text{En los cinco términos los radicales son semejantes.}}=\underbrace{\left(3+\frac{5}{4}-1+\frac{1}{2}-4\right)}_{\text{Suma algebraica de coeficientes.}}\sqrt{2}=-\frac{1}{4}\sqrt{2}$$

$$b)\quad 2\sqrt[3]{81}-4\sqrt[3]{24}=$$

= ____________________

= ____________________

= ____________________

= ____________________

= ____________ = ______

- *Los radicales no son semejantes aparentemente.*
- *Factorear los radicandos.*
- *Descomponer los exponentes en sumas para poder extraer factores del radical.*
- *Distribuir los radicales en el producto y simplificar índice y exponente.*
- *Multiplicar los coeficientes.*
- *Como los radicales ya se transformaron en semejantes puedo operar con los coeficientes.*

$$c)\quad \sqrt{2}+2\sqrt[4]{36}-\sqrt{8}+\sqrt{54}=$$

= ________________________________

= ________________________________

= ________________________________

= ________________________________

= ________________________________

= ________________________________

- *Los radicales no son semejantes aparentemente.*
- *Factorear los radicandos.*
- *Distribuir y simplificar.*
- *Se asocian los radicales que no se simplificaron totalmente, porque son de igual índice.*
- *Los radicales no son todos semejantes.*
- *Agrupo los que son semejantes y opero con sus coeficientes*
- *La adición de radicales no semejantes queda indicada.*

Multiplicación de números irracionales

✓ *Multiplicación de radicales de igual índice.*

> *El producto de números irracionales de igual índice es otro irracional cuyo índice es el mismo y cuyo radicando es el producto de los radicandos de cada uno de ellos.*

Ejemplos:

$$a)\ \sqrt[5]{500}.\sqrt[5]{50} = \underbrace{\sqrt[5]{\qquad\quad}.\sqrt[5]{\qquad .}}_{\text{Factorear}} = \underbrace{\sqrt[5]{\qquad\quad .}}_{\text{Inversa de propiedad distributiva}} = \underbrace{\sqrt[5]{\qquad}}_{\text{Suma de exponentes de potencias de igual base}} = \underbrace{\sqrt[5]{\quad}.\sqrt[5]{\quad}}_{\text{Extraer factores del radical, si es posible}} = 5.\sqrt[5]{8}$$

RECORDAR PROPIEDAD 2 y 4 DE LA RADICACIÓN.

PÁGINA 5

$$b)\ \sqrt[3]{81a^5}.\sqrt[3]{40b^2} = \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_ = \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_ = \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_ =$$

$$= \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_ = 6a\sqrt[3]{5a^2b^2}$$

$$c)\ (-7+\sqrt{2}).(3-5\sqrt{2}) = \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_ = \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_ =$$

$$= \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_ = -31+38\sqrt{2}$$

Producto Notable: Suma por Diferencia

$$(a+b).(a-b) = a^2 - b^2$$

$$d)\ (5+\sqrt{3}).(5-\sqrt{3}) = \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_ = \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_ = \_\_\_\_$$

✓ *Multiplicación de radicales de distinto índice.*

> *El producto de números irracionales de distintos índices es otro irracional equivalente, cuyo índice es el múltiplo común menor (m.c.m) entre los dados; y el radicando es el resultado de aplicar la equivalencia.*

Ejemplos:

$$a)\ \frac{1}{2}\sqrt{3x^4}.\frac{2}{3}\sqrt[3]{9x} =$$

$$= \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_ =$$

$$= \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_ =$$

- Multiplicar los coeficientes y factorear los radicandos.
- Determinar el índice común menor.
- Aplicar la propiedad 5) de radicales semejantes.
- Quedan transformados en radicales de igual índice. Luego opero como en el caso anterior.

$= \underline{\hspace{6cm}} =$

$= \underline{\hspace{5cm}} = \underline{\hspace{2cm}} = \underline{\hspace{4cm}} = \underline{\hspace{4cm}} = x^2 \sqrt[6]{3x^2}$

Potencias de exponente racional

Las raíces guardan una estrecha relación con las potencias de exponente racional no entero.
Recordamos la propiedad 1 de la radicación:
Exponentes racionales

$$\left(\sqrt[n]{a}\right)^m = \sqrt[n]{a^m} = a^{m/n} \qquad con\ a > 0, \qquad m, n \in \mathbb{N}$$

Todo radical puede convertirse en una potencia de exponente fraccionario, y de esa manera podemos aplicar todas las propiedades de la potenciación.

Por ejemplo: $\left(\sqrt{2}\right)^3 = 2^{3/2}$

$(3)^{4/7} = \sqrt[7]{3^4}$

$a)\ \sqrt{5} =$ $\qquad b)\ \sqrt[3]{7^2} =$ $\qquad c)\ \sqrt[5]{16} =$ $\qquad d)\ \sqrt[8]{32x^3} =$

Para realizar estas transformaciones, debes tener en cuenta que las potencias tengan la misma base y que los ordenadores, como paréntesis, corchetes y llaves te indican el alcance de cada operación. No existe un orden estricto, por cuál propiedad comenzar. Por ejemplo:

$a)\ \sqrt[3]{3.\left(3.\sqrt[5]{3}\right)^2} = \underline{\hspace{4cm}} = \underline{\hspace{4cm}} = \underline{\hspace{2.5cm}} = \underline{\hspace{3cm}} = 3\sqrt[15]{3^2}$

$b)\ 5.\sqrt[3]{5} : \sqrt{\left(\frac{1}{5}.\sqrt[5]{25}\right)^{-1/3}} = \underline{\hspace{5cm}} = \underline{\hspace{7cm}} =$

$= \underline{\hspace{5cm}} = \underline{\hspace{3cm}} = \underline{\hspace{3cm}} = 5\sqrt[30]{5^7}$

División en $\mathbb{R}$ - Racionalización de Denominadores.

Antes de abordar el tema de racionalización, vamos a recordar una propiedad de la división entre números racionales.

"Si en una división se multiplican el dividendo y el divisor por un mismo número, el cociente no se altera"

Por ejemplo: $\frac{100}{20} = 5$

$\frac{100\,.\,4}{20\,.\,4} = \frac{400}{80} = 5$ Esta estrategia es la que usaremos para resolver la división por un número irracional.

Para resolver el problema de la división por un número ***irracional*** o una expresión algebraica irracional basta transformar el divisor o denominador ***irracional*** en un número ***racional***. Esta operación se conoce con el nombre de ***racionalización de denominador.***
Pueden presentarse tres casos.

- *PRIMER CASO:* *El denominador irracional es una raíz cuadrada*

En este caso se agrega multiplicando, al numerador y al denominador, el mismo número irracional que figura en el divisor.

$$a)\quad \frac{4\sqrt{3}}{3\sqrt{2}} = \underbrace{\frac{4\sqrt{3}}{3\sqrt{2}}\cdot\boxed{\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}}}}_{\text{Agregado}} = \underbrace{\frac{\qquad}{\qquad} = \frac{\quad}{\quad}}_{\text{El radicando queda elevado al cuadrado y se simplifica con la raíz}} = \frac{\quad}{\quad} = \frac{\quad}{\quad}$$

$$b)\quad \frac{2}{\sqrt{27}} = \frac{2}{\sqrt{3^3}} = \frac{2}{3\sqrt{3}}\cdot\boxed{\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}}} = \frac{2\sqrt{3}}{3\sqrt{3^2}} = \frac{2\sqrt{3}}{3.3} = \frac{2\sqrt{3}}{9} = \frac{2}{9}\sqrt{3}$$

$$c)\quad \frac{2a^2}{\sqrt{243a}} = \underbrace{\frac{2a^2}{\sqrt{3^5 a}}}_{\text{Factorear y Extraer factores}} = \underbrace{\frac{2a^2}{9\sqrt{3a}}\cdot\boxed{\frac{\sqrt{3a}}{\sqrt{3a}}}}_{\text{Agregado}} = \frac{\qquad}{\qquad} = \frac{\qquad}{\qquad} = \underbrace{\frac{\qquad}{\qquad}}_{\text{Denominador Racional}}$$

- *SEGUNDO CASO:* *El denominador irracional es una raíz de otro índice distinto de dos.*

En este caso se agrega multiplicando, al numerador y al denominador, una raíz de igual índice a la dada en el divisor, pero en el radicando de dicha raíz se agrega el factor conveniente de manera que se complemente para lograr igualar al índice.

$$a)\quad \frac{1}{\sqrt[5]{45x^4y^3}} = \underbrace{\frac{1}{\sqrt[5]{3^2.5.x^4.y^3}}}_{\text{Factorear}}\cdot\underbrace{\boxed{\frac{\sqrt[5]{3^3.5^4.x.y^2}}{\sqrt[5]{3^3.5^4.x.y^2}}}}_{\text{Agrego raíz de igual índice; y los mismos factores con el exponente necesario para llegar a igualar el índice.}} = \underbrace{\frac{\sqrt[5]{\qquad}}{\sqrt[5]{\qquad}}}_{\text{Producto de radicales de igual índice: se introducen todos los factores en un radical.}} = \underbrace{\frac{\qquad}{\qquad}}_{\text{Se simplifican todos los factores.}} = \underbrace{\qquad}_{\text{Expresión algebraica racional.}}$$

$$b)\quad \frac{\sqrt{2}}{\sqrt[3]{48}} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt[3]{2^4.3}} = \frac{\sqrt{2}}{2\sqrt[3]{2.3}}\cdot\boxed{\frac{\qquad}{\qquad}} = \frac{\qquad}{\qquad} = \frac{\qquad}{\qquad} = \frac{\qquad}{\qquad} = \frac{\qquad}{\qquad}$$

➢ *TERCER CASO:* *El denominador irracional es un binomio, en el que uno o ambos términos son números irracionales.*

En este caso se agrega multiplicando, al numerador y denominador, el conjugado del divisor; o sea, los mismos números pero cambiado de signo el segundo término.

$$b)\quad \frac{\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}} \cdot \boxed{\frac{\qquad}{\qquad}} = \frac{\qquad\qquad}{\qquad\qquad} = \frac{\qquad\qquad}{\qquad\qquad} = \frac{\qquad}{\qquad} = 2\sqrt{3}-3$$

$$a)\quad \frac{\sqrt{6}+3}{\sqrt{2}+\sqrt{3}} \cdot \frac{(\sqrt{2}-\sqrt{3})}{(\sqrt{2}-\sqrt{3})} = \frac{\qquad\qquad\qquad\qquad}{\qquad\qquad\qquad\qquad} = \frac{\qquad\qquad\qquad\qquad}{\qquad\qquad\qquad\qquad}$$

$$= \frac{\qquad\qquad\qquad}{\qquad\qquad\qquad} = \frac{\quad}{\quad} = \sqrt{3}$$

TRABAJO PRÁCTICO Nº 1

NÚMEROS REALES. IRRACIONALES

1) *Completar los espacios con cruces, según corresponda:*

	$\mathbb{N}$	$\mathbb{Z}$	$\mathbb{Q}$	$\mathbb{I}$	$\mathbb{R}$
0,2565656…					
$2 + \sqrt{3}$					
$\sqrt[4]{64}$					
$\sqrt{-4}$					
- 5					
$\frac{3}{2}$					
2,93					
0,0102030405…					
$\frac{10}{5}$					
$\sqrt[3]{-27}$					
7 - 12					
0					
$\sqrt{8}$					

2) *Descubrir la regla de formación de los siguientes números irracionales y luego escribe los seis números siguientes:*

a) 1,33343536 …
b) 0,808800888000 …
c) 321, 612244896 …

3) *Decidir si las siguientes afirmaciones son V o F; en caso de falsedad exhiban un contraejemplo:*

1. La unión del conjunto de los números enteros con el de los racionales forman el conjunto de los números reales.
2. Todo número real es racional.
3. Todo número racional es entero.
4. Todo número irracional es real.
5. Existen números reales que al elevarlos al cuadrado dan negativos.
6. Existen “huecos” en la recta numérica que no son ocupados por ningún número real.
7. Si a y b son números reales, entonces a es mayor que b o b es mayor que a.
8. Todo número natural es real.
9. Siempre consigo un resultado al calcular la raíz cuadrada de un número real.
10. La suma de un racional con un irracional es un número racional.

11. La multiplicación entre dos números irracionales puede dar un número racional.

4) *Calcular aplicando las propiedades correspondientes.*

$a)\ \sqrt{2}\,.\sqrt{10}.\sqrt{5} =$

$b)\ \sqrt{125} : \sqrt{5} =$

$c)\ \sqrt[4]{3^6} =$

$d)\ \sqrt{90} : (\sqrt{2}.\sqrt{5}) =$

$e)\ \sqrt[3]{\sqrt{a^{12}}} =$

$f)\ \sqrt[3]{2}.(\sqrt[3]{8} : \sqrt[3]{2}) =$

$g)\ \sqrt{\sqrt{\frac{1}{a^{12}}}} =$

$h)\ (\sqrt{12}.\sqrt{6}) : \sqrt{2} =$

5) *Simplificar al máximo cada expresión, extrayendo factores del radical:*

$a)\ \sqrt{27}$

$b)\ \sqrt{45}$

$c)\ \sqrt{252}$

$d)\ \sqrt[3]{32}$

$e)\ \sqrt{684}$

$f)\ \sqrt[4]{243}$

$g)\ \sqrt{8x^6a^3}$

$H)\ \sqrt[3]{8a^3x^4}$

$i)\ \sqrt{200a^5b^7m^6}$

$j)\ \sqrt[4]{10000a^8b^8y^3}$

$k)\ \sqrt[5]{\frac{1}{32}x^{10}y^{12}z^6}$

6) *Realizar las siguientes sumas algebraicas entre radicales:*

a) $\sqrt{45} - \sqrt{27} - \sqrt{20} =$

b) $\sqrt{75} - \sqrt{147} - \sqrt{675} - \sqrt{12}$

c) $\sqrt{175} - \sqrt{243} - \sqrt{63} - 2\sqrt{75} =$

d) $\frac{2}{9}\sqrt{20} - \sqrt{45} - \frac{3}{7}\sqrt{125} - \sqrt{98} =$

e) $7\sqrt{450} - \sqrt{320} - \frac{14}{3}\sqrt{80} - \frac{2}{5}\sqrt{800} =$

f) $\sqrt[3]{54} - \sqrt[3]{24} + \frac{3}{28}\sqrt[3]{16} =$

g) $\sqrt[3]{875} - \frac{1}{7}\sqrt[3]{448} + \frac{35}{8}\sqrt[3]{189} =$

h) $\sqrt[3]{40} - \sqrt[3]{625} + \sqrt[3]{135} + \frac{\sqrt[3]{5}}{2} =$

7) *Resolver aplicando propiedad distributiva:*

a) $(\sqrt{5}+2).(\sqrt{5}+2) =$

b) $(2\sqrt{3}+4\sqrt{2}).(2\sqrt{3}-4\sqrt{2}) =$

c) $(\sqrt{7}-4)^2 =$

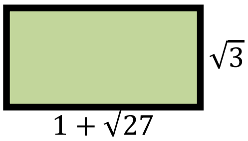
d) $(\sqrt{5}+\sqrt{3})^2 =$

8) *Resolver las operaciones indicadas, trabajando los radicales hasta su mínima expresión*

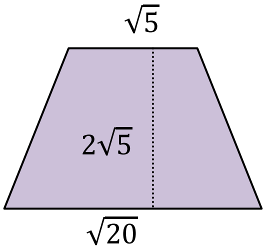
$a)\ \sqrt{2}\,.\sqrt{8} =$	$f)\ \left(6\sqrt{5} - 3\sqrt{10}\right)^2 =$
$b)\ \sqrt{ab}\,.\sqrt{a} =$	$g)\ \sqrt[3]{9}\,.\sqrt[4]{32}\,.\sqrt[3]{16}\,.\sqrt[4]{9} =$
$c)\ \sqrt{ab^3}\,.\sqrt{ab} =$	$h)\ \left(2\sqrt{5} + 4\sqrt{8}\right)^2 =$
$d)\ \sqrt[4]{20}\,.\sqrt{10}\,.\sqrt[3]{200} =$	$i)\ \left(\sqrt{5} - \sqrt{3}\right).\left(\sqrt{5} + \sqrt{3}\right) =$
$e)\ \sqrt[4]{8}\,.\sqrt[3]{32}\,.\sqrt[3]{16}\,.\sqrt[5]{81} =$	$j)\ \left(\sqrt{12} - 2\sqrt{6}\right)^2 =$

9) *Hallar el valor exacto del perímetro y el área (en cm) de las siguientes figuras.*

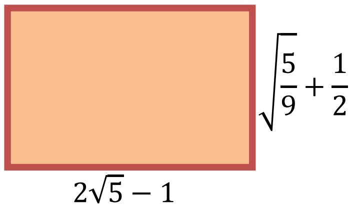
a)



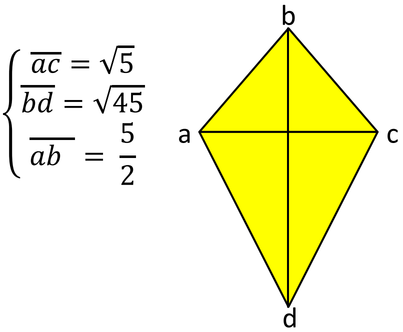
b) Isósceles



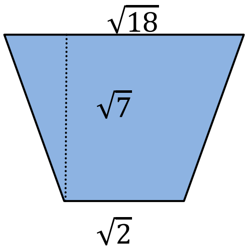
c)



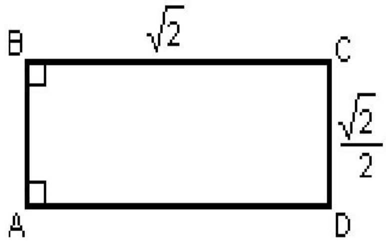
d) Romboide



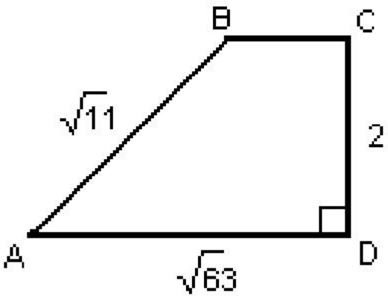
e) Isósceles



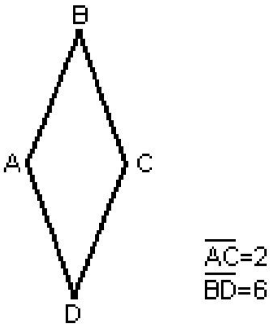
f)



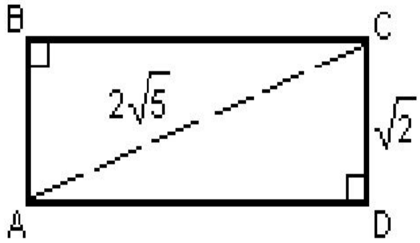
g)



h)

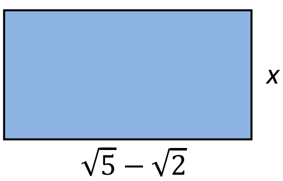


i)

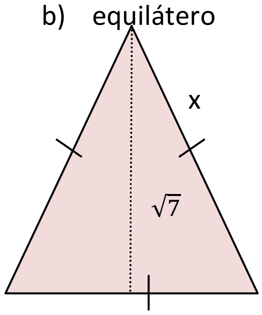


10) *El área de estas figuras es igual a 1 cm². Hallar el valor de la incógnita y expresar los resultados sin radicales en el denominador.*

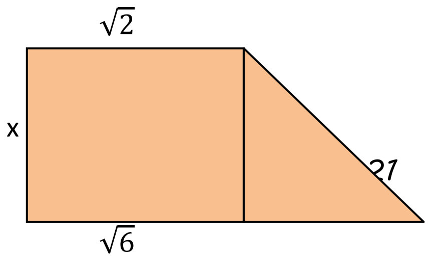
a)



b) equilátero



c)



11) Realizar las siguientes operaciones aplicando propiedades.

$a)\ \dfrac{3^{1/2} : 3}{(3^2)^{-1/2}} =$

$b)\ \dfrac{8 :\ 2^4}{16 . 2^5} =$

$c)\ \left(\dfrac{2}{3}\right)^3 . \left(\dfrac{2}{3}\right)^{-2} . \left(\dfrac{3}{2}\right) =$

$d)\ \left\{\dfrac{[(-2)^3]^2}{3}\right\}^{-1} =$

$e)\ \left[\left(2^{4/9}\right)^{1/2}\right]^{-3} : [(2^{-1})^2]^{-1/3} =$

$f)\ \sqrt[3]{\left[\sqrt{\dfrac{1}{5}} . 5^{3/2} . \left(\dfrac{1}{5}\right)^{-1/3}\right]^{-2}} =$

$g)\ \left(2^{1/2}\right)^{3/2} . \left(\sqrt{2^5}\right)^{-2} =$

12) Racionalizar los denominadores

$a)\ \dfrac{2}{\sqrt{7}} =$

$b)\ \dfrac{1}{\sqrt{3}} =$

$c)\ \dfrac{5}{\sqrt{15}} =$

$d)\ \dfrac{12}{\sqrt{6}} =$

$e)\ \dfrac{3}{2\sqrt{5}} =$

$f)\ \dfrac{2}{4\sqrt{8}} =$

$g)\ \dfrac{2a}{\sqrt{3ax}} =$

$h)\ \dfrac{5b}{\sqrt{7b}} =$

$i)\ \dfrac{2ab}{\sqrt{8ab}} =$

$j)\ \dfrac{2}{\sqrt[3]{5}} =$

$k)\ \dfrac{3}{\sqrt[3]{16}} =$

$l)\ \dfrac{2}{\sqrt[6]{16}} =$

$m)\ \dfrac{5}{\sqrt[3]{4}} =$

$n)\ \dfrac{8}{\sqrt[5]{16}} =$

$o)\ \dfrac{6}{\sqrt[3]{2}} =$

$p)\ \dfrac{9}{\sqrt[3]{9a}} =$

$q)\ \dfrac{3}{\sqrt[6]{a^5.b^6.c^2}} =$

$r)\ \dfrac{3n}{\sqrt[3]{n^2m}} =$

$s)\ \dfrac{2}{\sqrt{3}-11} =$

$t)\ \dfrac{5}{\sqrt{2}+3} =$

$u)\ \dfrac{3}{4-\sqrt{2}} =$

$v)\ \dfrac{2}{1-\sqrt{7}} =$

$w)\ \dfrac{-5}{\sqrt{5}+1} =$

$x)\ \dfrac{6}{2-\sqrt{3}} =$

$y)\ \dfrac{10}{\sqrt{2}+5} =$

$z)\ \dfrac{\sqrt{7}+\sqrt{3}}{\sqrt{7}-\sqrt{3}} =$

13) Resolver las siguientes ecuaciones

$a)\ \sqrt{3x-1} = 2$

$b)\ x^2 - \sqrt{3}x = 0$

$c)\ (3x-1)^2 = 6$

$d)\ \left(x + 2\sqrt{10}\right)\left(x - \sqrt{40}\right) = \sqrt[3]{3^6}$

$e)\ x - \dfrac{1}{3}\sqrt{2} = \dfrac{3}{\sqrt{2}+1} - \dfrac{2}{1-\sqrt{2}}$

$f)\ \dfrac{x}{\sqrt{24}} + \dfrac{1}{5}\left(\sqrt{6}-2\right) = \dfrac{-3}{1+\sqrt{6}}$

CLAVE DE RESPUESTAS

Ejercicio 3)

1) F 2) F 3) F 4) V 5) F 6) F 7) F 8) V 9) F 10) F 11) V

Ejercicio 4)

a) 10 b) 5 c) $3\sqrt{3}$ d) 3 e) a^2 f) 2 g) $\frac{1}{a^3}$ h) 6

Ejercicio 5)

a) $3\sqrt{3}$ b) $3\sqrt{5}$ c) $6\sqrt{7}$ d) $2\sqrt[3]{4}$ e) $6\sqrt{19}$ f) $3\sqrt[4]{3}$

g) $2x^3a\sqrt{2a}$ h) $2ax\sqrt[3]{x}$ i) $10a^2b^3m^3\sqrt{2a}$ j) $10ab\sqrt[4]{y^3}$ k) $\frac{1}{2}x^2y^2z\sqrt{y^2}$

Ejercicio 6)

a) $\sqrt{5}-3\sqrt{3}$ b) $-19\sqrt{3}$ c) $2\sqrt{7}-19\sqrt{3}$ d) $-\frac{296}{63}\sqrt{5}-7\sqrt{2}$

e) $97\sqrt{2}-\frac{80}{3}\sqrt{5}$ f) $\frac{45}{14}\sqrt[3]{2}-2\sqrt[3]{3}$ g) $\frac{983}{56}\sqrt[3]{7}$ h) $\frac{1}{2}\sqrt[3]{5}$

Ejercicio 7)

1. $9+4\sqrt{5}$ 2. -20 3. $23-8\sqrt{7}$ 4. $8+2\sqrt{15}$

Ejercicio 8)

a) 4 b) $a\sqrt{b}$ c) ab^2 d) $20\sqrt[12]{3125}$ e) $8\sqrt[20]{2^{15}3^{16}}$

f) $270-180\sqrt{2}$ g) $12\sqrt[12]{3^2 2^7}$ h) $148+32\sqrt{10}$ i) 2 j) $36-24\sqrt{2}$

Ejercicio 9)

$a)$ $p=2+8\sqrt{3}\ cm$, $A=9+\sqrt{3}\ \ cm^2$

$b)$ $p=\sqrt{85}+3\sqrt{5}\ cm$, $A=15\ cm^2$

$c)$ $p=-1+\dfrac{14}{3}\sqrt{5}cm$, $A=\dfrac{17}{6}+\dfrac{2}{3}\sqrt{5}\ cm^2$

$d)$ $p=5+\sqrt{85}\ cm$, $A=\dfrac{15}{2}\ cm^2$

$e)$ $p=6+4\sqrt{2}\ cm$, $A=2\sqrt{14}\ \ cm^2$

$f)$ $p=3\sqrt{2}\ cm$, $A=1\ \ cm^2$

$g)$ $p=5\sqrt{7}+\sqrt{11}+2\ cm$, $A=5\sqrt{7}\ \ cm^2$

$h)$ $p=4\sqrt{10}\ \ cm$, $A=6\ cm^2$

$i)$ $p=8\sqrt{2}\ \ cm$, $A=6\ \ cm^2$

Ejercicio 10)

$a)$ $x=\dfrac{\sqrt{2}+\sqrt{5}}{3}\ \ cm$ $b)$ $x=\dfrac{2}{7}\sqrt{7}\ \ cm$ $c)$ $x=\dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2}\ \ cm$

Ejercicio 11)

a) $\sqrt{3}$ b) $\frac{1}{1024}$ c) 1 d) $\frac{3}{64}$ e) $\frac{\sqrt[3]{4}}{4}$ f) $\sqrt[9]{\left(\frac{1}{5}\right)^8}$ g) $\frac{\sqrt[4]{8}}{32}$

Ejercicio 12)

a) $\frac{2}{7}\sqrt{7}$ b) $\frac{\sqrt{3}}{3}$ c) $\frac{\sqrt{15}}{3}$ d) $2\sqrt{6}$ e) $\frac{3\sqrt{5}}{10}$ f) $\frac{\sqrt{2}}{8}$
g) $\frac{2\sqrt{3ax}}{3x}$ h) $\frac{5}{7}\sqrt{7b}$ i) $\frac{\sqrt{2ab}}{2}$ j) $\frac{2}{5}\sqrt[3]{25}$ k) $\frac{3}{4}\sqrt[3]{4}$ l) $\sqrt[6]{4}$
m) $\frac{5\sqrt[3]{2}}{2}$ n) $4\sqrt[5]{2}$ o) $3\sqrt[3]{4}$ p) $\frac{3\sqrt[3]{3a^2}}{a}$ q) $\frac{3\sqrt[6]{ac^4}}{bac}$ r) $\frac{3\sqrt[3]{nm^2}}{m}$
s) $\frac{11}{59}-\frac{\sqrt{3}}{59}$ t) $\frac{15}{7}-\frac{5}{7}\sqrt{2}$ u) $\frac{6}{7}+\frac{3\sqrt{2}}{14}$ v) $-\frac{1}{3}-\frac{\sqrt{7}}{3}$ w) $\frac{5}{4}-\frac{5}{4}\sqrt{5}$ x) $12+6\sqrt{3}$
y) $\frac{50}{23}-\frac{10}{23}\sqrt{2}$ z) $\frac{5}{2}+\frac{\sqrt{21}}{2}$

Ejercicio 13)

a) $x=\frac{5}{3}$ b) $x_1=0 \wedge x_2=\sqrt{3}$ c) $x_1=\frac{1}{3}+\frac{\sqrt{6}}{3} \wedge x_2=\frac{1}{3}-\frac{\sqrt{6}}{3}$
d) $x_1=7 \wedge x_2=-7$ e) $x=-1+\frac{13}{3}\sqrt{2}$ f) $-\frac{48}{5}+2\sqrt{6}$

Intervalo real. Clasificación

Un ***intervalo***, es un subconjunto del conjunto de los números reales, $\mathbb{R}$. O sea, una parte, una porción de la recta real, determinada por alguna relación de orden.

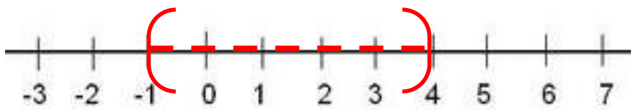
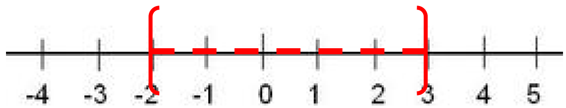
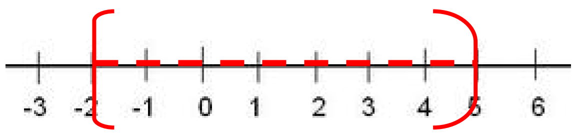
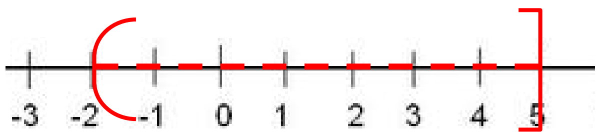
Una relación de orden se establece a través de una desigualdad.

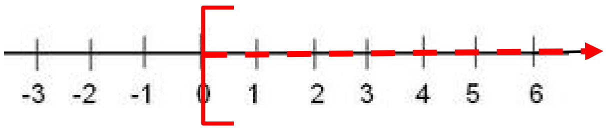
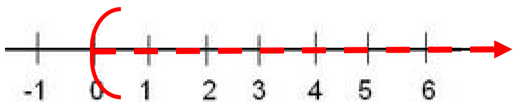
Dados dos números reales $\boldsymbol{a}$ y $\boldsymbol{b}$ (llamados extremos), puede ocurrir:

$$\boldsymbol{a} < b \quad o \quad a \leq b \leq \quad o \quad a > b \quad o \quad a \geq b$$

Para establecer los extremos de dichos intervalos se utilizan paréntesis, si el valor no pertenece al intervalo; o corchetes, si el valor pertenece al intervalo.

Clases de intervalos

Lenguaje formal	Ejemplo
➢ Intervalo abierto $A = \{x \in \mathbb{R}/a < x < b\} = (a; b)$	$A = \{x \in \mathbb{R}/-1 < x < 4\} = (-1; 4)$  "valores mayores que -1 y menores que 4"
➢ Intervalo cerrado $A = \{x \in \mathbb{R}/a \leq x \leq b\} = [a; b]$	$A = \{x \in \mathbb{R}/-2 \leq x \leq 3\} = [-2; 3]$  "valores mayores o igual que -2 y menores o igual que 3"
➢ Intervalos semiabiertos $A = \{x \in \mathbb{R}/a \leq x < b\} = [a; b)$ $A = \{x \in \mathbb{R}/a < x \leq b\} = (a; b]$	$A = \{x \in \mathbb{R}/-2 \leq x < 5\} = [-2; 5)$  "valores mayores o iguales que -2 y menores que 5" $A = \{x \in \mathbb{R}/-2 < x \leq 5\} = (-2; 5]$  "valores mayores que -2 y menores o igual que 5"

➢ Intervalos infinitos	$A = \{x \in \mathbb{R} / x \leq 4\} = (-\infty; 4]$
$A = \{x \in \mathbb{R} / x \leq b\} = (-\infty; b]$	"valores menores o igual que 4" 
$A = \{x \in \mathbb{R} / x < b\} = (-\infty; b)$	$A = \{x \in \mathbb{R} / x < 4\} = (-\infty; 4)$ "valores menores que 4" 
$A = \{x \in \mathbb{R} / x \geq b\} = [b; \infty)$	$A = \{x \in \mathbb{R} / x \geq 0\} = [0; \infty)$ "valores mayores o iguales que cero" 
$A = \{x \in \mathbb{R} / x > b\} = (b; \infty)$	$A = \{x \in \mathbb{R} / x > 0\} = (0; \infty)$ "valores mayores que cero" 

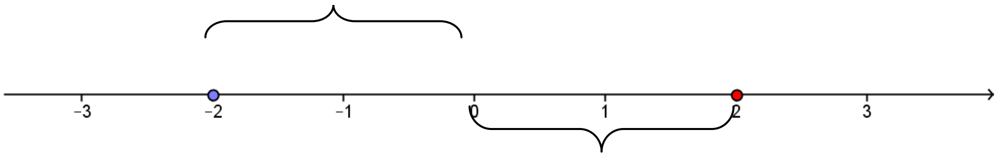
Módulo de un número real

El ***módulo*** o ***valor absoluto*** de un número es el mismo número si este es positivo, o su opuesto si es negativo.

Formalmente	Ejemplo	Lectura
$\lvert x\rvert = \begin{cases} x & si\ x \geq 0 \\ -x & si\ x < 0 \end{cases}$	$\lvert 2\rvert = 2$ $\lvert -2\rvert = -(-2) = 2$	El módulo de dos es dos. El módulo de menos dos es dos.

En cuanto a la representación gráfica, el módulo de un número representa la distancia entre el cero y dicho número.

$|-2| = 2$



$|2| = 2$

Por representar una distancia, el módulo es un valor mayor o igual a cero.
Existe otra forma de expresar el módulo de un número real, en la que interviene la raíz cuadrada de x^2:

$$|x| = \sqrt{x^2}$$

Por ejemplo, la ecuación $x^2 = 25$

$$\sqrt{x^2} = \sqrt{25}$$

$$|x| = 5$$

$x = 5$ $\quad$ $x = -5$

Ecuaciones e inecuaciones con módulo

- ✓ **Ejemplo 1**

$$|x+1| = 3$$

-------------------- $\qquad$ ---------------------

------------------- $\qquad$ ---------------------

X = 2 $\qquad$ x = -4

v : se lee "o"

- ✓ **Ejemplo 2**

$$3 + 2.\,|x-2| = 7$$

$$2.\,|x-2| = 7-3$$

$$|x-2| = 4:2$$

$$|x-2| = 2$$

Separar en términos y comenzar a despejar hasta dejar solo el módulo

________________ $\qquad$ ________________

________________ $\qquad$ ________________

En general, las ecuaciones con módulo tienen dos soluciones; salvo cuando están igualadas a cero.

Esta situación se formaliza de la siguiente manera, para el ejemplo 1, la solución es:

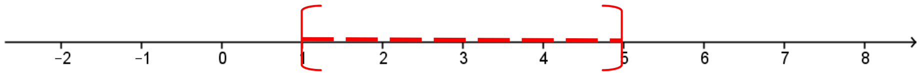
$$S = \{-4; 2\}$$

Observa que se utilizan llaves para expresar la respuesta, porque se trata de un conjunto en el que estoy enumerando los valores que toma la incógnita. <u>NUNCA</u> utilices paréntesis ni corchetes, porque la solución no es un intervalo real.

✓ **Ejemplo 3**

$$|x - 3| \leq 2$$

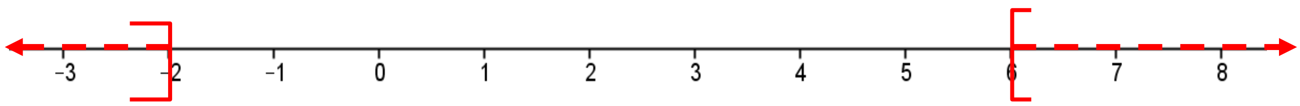
∧ : se lee "y"



$S = [1; 5]$ En este caso la solución es un **intervalo cerrado**, por ello se utilizan los corchetes; y a diferencia de la ecuación, representa el conjunto de los infinitos números reales que se encuentran entre 1 y 5, incluidos estos valores extremos.

✓ **Ejemplo 4**

$$|x - 2| \geq 4$$



$S = (-\infty; -2] \cup [6; \infty)$ La solución se expresa como unión de intervalos infinitos, en este caso cerrados porque los extremos están incluidos.

Propiedades del Módulo

Enunciado	Lenguaje formal	Ejemplo
1) El módulo de un número real es igual al módulo de su opuesto, y nunca es negativo.	$\lvert a\rvert = \lvert -a\rvert = a \geq 0$	
2) El módulo del producto entre números reales es igual al producto de los módulos de los mismos.	$\lvert a.b\rvert = \lvert a\rvert.\lvert b\rvert$	
3) El módulo del cociente entre números reales es igual al cociente de los módulos de los mismos.	$\left\lvert\frac{a}{b}\right\rvert = \frac{\lvert a\rvert}{\lvert b\rvert}$ $b \neq 0$	
4) El módulo de la suma de dos	$\lvert a + b\rvert \leq \lvert a\rvert + \lvert b\rvert$	a) Si se consideran dos

números reales es igual o menor que la suma de los módulos de los mismos.		números de igual signo, positivos o negativos $I)$ $II)$ b) Si se consideran dos números de distinto signo.
5) El módulo de la diferencia de dos números reales es igual o mayor que la diferencia de los módulos de los mismos.	$\|a-b\| \geq \|a\| - \|b\|$	a) Depende del orden que presenta el cálculo.

Aplicación de las propiedades del módulo en la resolución de ecuaciones o inecuaciones

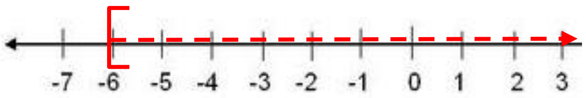
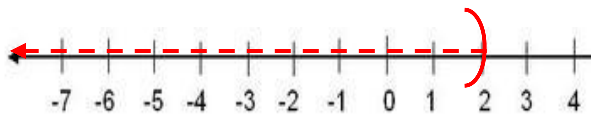
$a)$ $\dfrac{|-2x|}{5} + \left|\dfrac{3x}{-5}\right| = \left|\dfrac{-1}{6}\right|$

b) $|8x+8| - |5x+5| < 2$

TRABAJO PRÁCTICO Nº 2

INTERVALOS. MÓDULO. ECUACIONES E INECUACIONES

1) *Completar la siguiente tabla*

Inecuación	Intervalo	Representación
$a)\ -3 \leq x < 4$		
$b)$		
$c)$	$[-1; 1]$	
$d)$		
$e)\ \ 0 \leq x \leq 6$		
$f)$ *Todos los números reales mayores que* 1 *y menores que* 4		
$g)$	$(-3; 8]$	
$h)$ *Números mayores o iguales que* 5 *y menores que* 9		

2) *Hallar el módulo o valor absoluto de los siguientes números reales:*

$a)\ \left|\sqrt{\frac{4}{9}}\right| =$ ....

$b)\ |(-6)^3| =$ ....

$c)\ |\sqrt[3]{-27}| =$ ....

$d)\ \left|\left(-\frac{2}{5}\right)^{-1}\right| =$ ....

$e)\ |-1-8| + 0{,}2 =$ ....

$f)\ \frac{1}{3}\left(\frac{3}{2} + \left|1 - \frac{5}{2}\right|\right) =$ ....

3) *Resuelvan las siguientes ecuaciones con módulo:*

a) $|x| = 2$

b) $|x| = 16$

c) $|5x| = 10$

d) $|-2x + 3| = 7$

e) $(9x + 3)^2 = 25$

f) $\left|x - \frac{1}{3}\right| = 4$

g) $|3x - 4| = 23$

k) $|x - 4| + 3 = 5$

l) $|3x - 1| - 2 = \frac{1}{2}$

m) $|8x + 16| - |4x + 8| = 8$

n) $|2(x - 3)| = |x - 3|$

o) $|-3x| + |-x| = 4$

p) $|-8|.|-x| = |4(-4)|$

h) $|2x+1|+3=6$
i) $3=\sqrt{(2x-10)^2}$
j) $\left|\frac{2}{3}x+4\right|-5=2$
q) $|x+1|+|2+2x|=6$
r) $\frac{|1-x|}{|2|.|-1|}-\left|\frac{2-2x}{-8}\right|=1$
s) $3x^2=x^2+18$

4) *Resuelvan las siguientes inecuaciones con módulo, expresando y graficando el conjunto solución:*

a) $|x|<3$
b) $|x+5|\leq 10$
c) $|3x-2|\leq 8$
d) $|2(x-1)+4|<8$
e) $|x|\leq 5$
f) $|x-6|<15$
g) $|2+3(x-1)|<20$
h) $|x|\geq 3$
i) $|x-4|>5$
j) $|2x-3|>5$
k) $\left|3-\frac{2}{3}x\right|\geq 5$
l) $|x|+8>5$
m) $|-2x+6|>2$
n) $|-5x-2|>13$
o) $|6x+6|-|5x+5|<2$
p) $2|x-9|\geq|x-9|$
q) $-|x-3|+|2x-6|<4$
r) $|2x+4|<2+|x+2|$
s) $|-x|.|-3||2+4|>|-x|+|x|.|-4|^2+6$

CLAVE DE RESPUESTAS

Ejercicio 2)

a) 2/3 b) 216 c) 3 d) 5/2 e) 46/5 f) 1

Ejercicio 3)

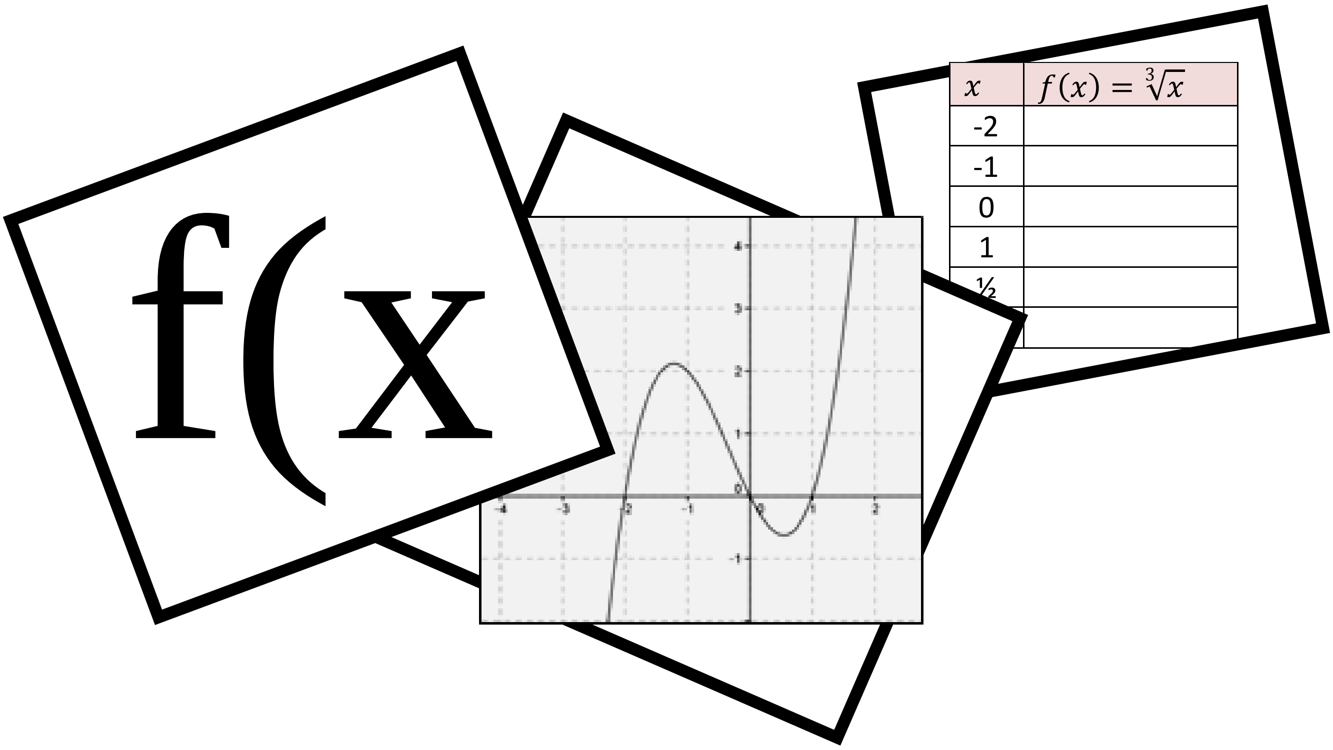
a) $S=\{-2;2\}$
b) $S=\{-16;16\}$
c) $S=\{-2;2\}$
d) $S=\{-2;5\}$
e) $S=\left\{\frac{2}{9};-\frac{8}{9}\right\}$
f) $S=\left\{\frac{13}{3};-\frac{11}{3}\right\}$
g) $S=\left\{9;-\frac{19}{3}\right\}$
h) $S=\{1;-2\}$
i) $S=\left\{\frac{13}{2};\frac{7}{2}\right\}$
j) $S=\left\{\frac{9}{2};-\frac{33}{2}\right\}$
k) $S=\{6;2\}$
l) $S=\left\{\frac{7}{6};-\frac{1}{2}\right\}$
m) $S=\{0;-4\}$
n) $S=\{3\}$
o) $S=\{-1;1\}$
p) $S=\{-2;2\}$
q) $S=\{-3;1\}$
r) $S=\{-3;5\}$
s) $S=\{-3;3\}$

Ejercicio 4)

a) $S=(-3;3)$
b) $S=[-15;5]$
c) $S=\left[-2;\frac{10}{3}\right]$
d) $S=(-5;3)$
e) $S=[-5;5]$
f) $S=(-9;21)$
g) $S=\left(-\frac{19}{3};7\right)$
h) $S=(-\infty;-3]\cup[3;\infty)$
i) $S=(-\infty;-1)\cup(9;\infty)$
j) $S=(-\infty;-1)\cup(4;\infty)$
k) $S=(-\infty;-3]\cup[12;\infty)$
l) $\nexists\ x\in\mathbb{R}$
m) $S=(-\infty;2)\cup(4;\infty)$
n) $S=(-\infty;-3)\cup\left(\frac{11}{5};\infty\right)$
o) $S=(-3;1)$
p) $S=\mathbb{R}$
q) $S=(-1;7)$
r) $S=(-4;0)$
s) $S=(-\infty;-6)\cup(6;\infty)$

Unidad 2

funciones



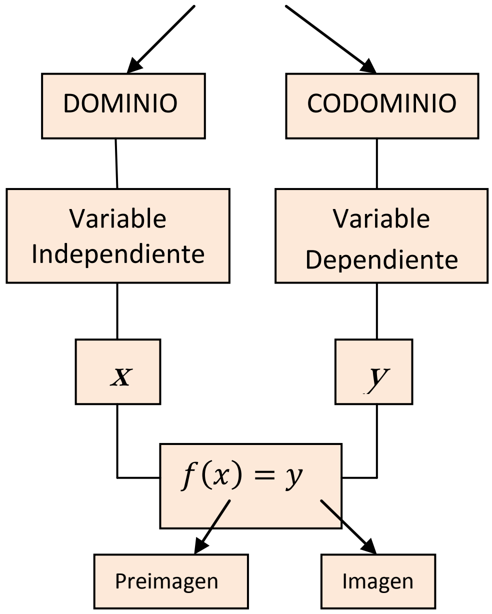
Funciones

Definición

> Una relación entre dos variables es ***función*** si a cada valor de la variable independiente le corresponde ***un único valor*** de la variable dependiente.

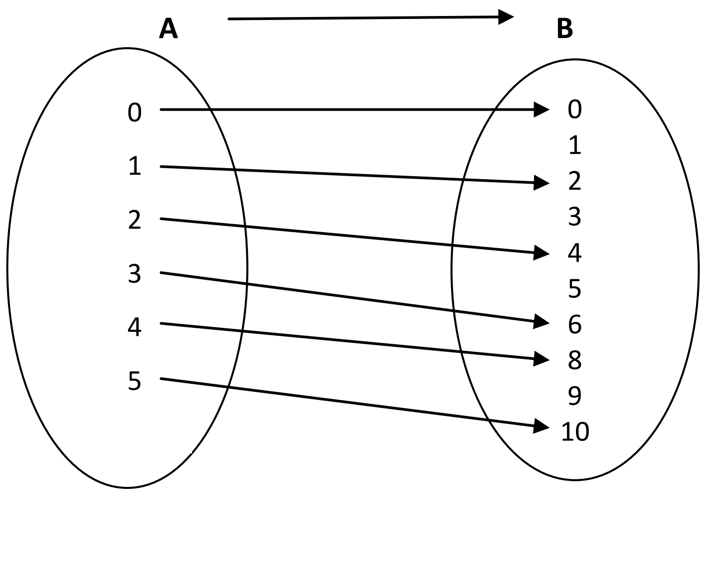
En símbolos, se denota así:

$$f : A \rightarrow B \qquad se\ lee\ "función\ de\ A\ en\ B"$$



Para definir cada uno de los conceptos generales que intervienen en una función, utilizaremos otro ejemplo y otra forma de representar funciones: Diagramas de Venn.

Sea la función $f : A \rightarrow B / f(x) = 2x$



Definiciones

- ***Dominio***: El dominio de una función es………………………………………………………………………

…….

Se denota ***Dom f.***

En el ejemplo: $Dom\ f\ = A = \{0,1,2,3,4,5\}$

- ***Codominio***: El codominio es……………………………………………………………………………………………

……

Se denota **Codom f.**

En el ejemplo: $Codom\ f\ = B\ = \{0,1,2,3,4,5,6,8,9,10\}$

- ***Imagen***: es el conjunto……………………………………………………………………………………………….

……

Se denota ***Im f***

En el ejemplo: $Im\ f\ = \{0,2,4,6,8,10\}$

¡Nota Importante!

$$Im\ f \subseteq Codom\ f$$

Esto se lee: la imagen de una función está incluida o puede ser igual al codominio de la función.

- Los ***ceros o raíces*** de una función son …………………………………………………………………………

……

Al conjunto de ceros se lo simboliza C^0 y los valores se enumeran entre llaves. En el gráfico, son los puntos de intersección de la curva con el eje de abscisas.

- El ***conjunto de positividad*** de una función está integrado por…………………………………………

…….

Se simboliza C^+ y se indican con intervalos abiertos, o sea que se utilizan paréntesis. En el gráfico, este conjunto indica la región del eje x donde la curva está por encima del mismo.

- El ***conjunto de negatividad*** de una función está integrado por …………………………………………

…….

Se simboliza C^- y se indican con intervalos abiertos, o sea con paréntesis. En el gráfico, este conjunto indica la región del eje x donde la curva está por debajo del mismo.

- El ***Intervalo de crecimiento*** de una función es ……………………………………………………………………

  ……

- El ***Intervalo de decrecimiento*** de una función es ……………………………………………………………

  ……

Conclusiones de la definición de función

- ✓ Todos los elementos del dominio deben estar relacionados.
- ✓ En el codominio pueden existir elementos sin relacionar.
- ✓ A veces el conjunto codominio y el conjunto imagen son iguales, y otras veces no.
- ✓ Dos elementos distintos del dominio pueden tener la misma imagen.

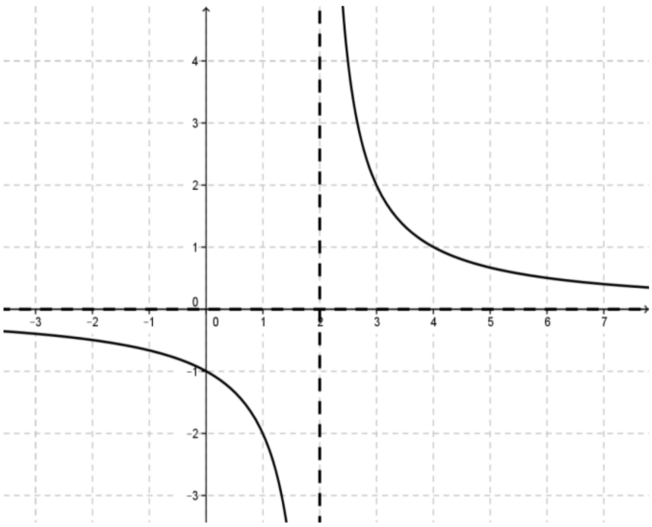
Funciones Particulares

Función Racional

La fórmula de estas funciones es una expresión racional, o sea una fracción. En esta oportunidad, se verán funciones de este tipo: $f(x) = \frac{a}{P(x)}$ donde

$a \in \mathbb{R} - \{0\}$; $P(x)$ *es una expresión algebraica de una variable, y* $P(x)$ *no nulo.*

Como la división por cero no está definida, **el dominio de una función racional es el conjunto de todos los valores de la variable que no anulan el denominador.**



Ejemplo 1) $f(x) = \frac{2}{x-2}$ $\quad Dom\, f =$………………

Observar que si la variable x tomara el valor 2, el denominador valdría cero. Y esa situación no puede suceder.

Por ese valor, que no pertenece al dominio, x = 2, pasa una recta imaginaria llamada …………………………………………… Esto quiere decir que la curva nunca va a atravesar esa recta.

Además, la función, nunca va a valer cero, para todo x, que pertenezca al dominio, que se quiera tomar. En consecuencia, por **y = 0**, pasa una recta imaginaria llamada……………………………………………

Como consecuencia de la asíntota horizontal, también se restringe la imagen de la función, que se expresa:

$$Im\, f = \mathbb{R} - \{0\}$$

Además, como se observa en el gráfico, el conjunto de ceros es vacío; ya que debido a su asíntota horizontal, la curva no interseca el eje de abscisas. Esta situación, se denota así:……………………….....

<u>Función Irracional</u>

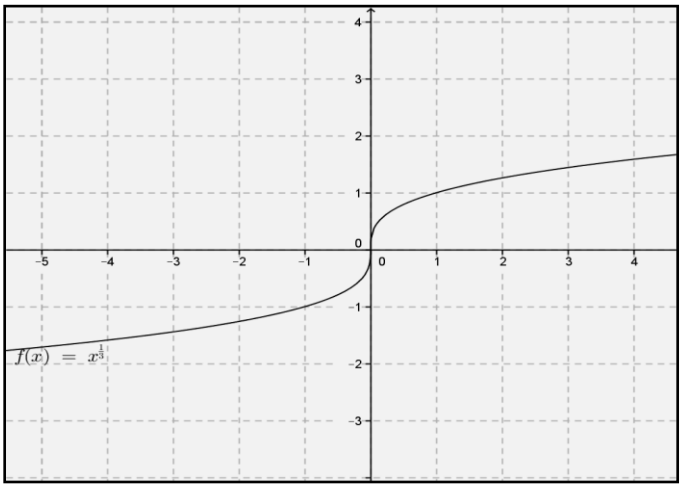
Se dice que una función es irracional cuando la variable independiente está afectada por la operación de radicación. Es decir, estas funciones tienen esta forma:

$$f(x) = \sqrt[n]{P(x)},$$

$$donde\ P(x)\ \ es\ una\ expresión\ algebraica\ y\ el\ índice\ \boldsymbol{n}\ puede\ ser\ par\ o\ impar.$$

- <u>Si el índice es impar</u>

x	$f(x) = \sqrt[3]{x}$
-2	
-1	
0	
1	
½	
2	



$Si\ \ n\ \ es\ impar\ \ Dom\ f\ =$……………….

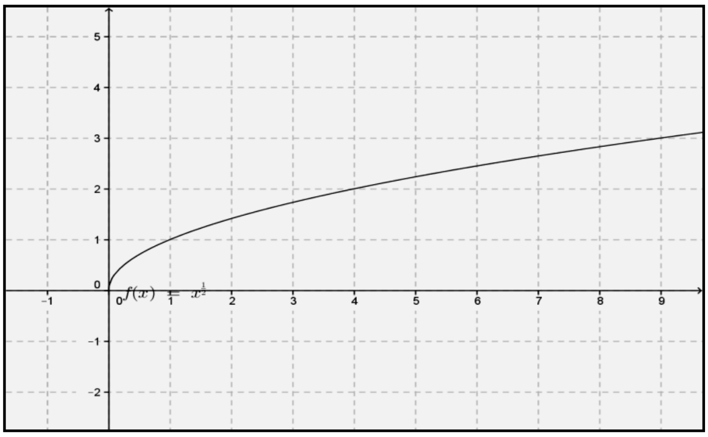
En la tabla de valores, puede observarse que la variable x ………………………………..............................

………..........................

……….

- <u>Si el índice es par</u>

x	$f(x) = \sqrt[2]{x}$
0	
1	
½	
2	
4	
-4	



$Si\ \ n\ \ es\ par\ \ Dom\ f\ =$………………………….

Cuando el índice es par, estamos condicionados a que el radicando…………………………………………….

…….porque……………………………….

………

Por lo tanto, el dominio de estas funciones será un intervalo real, que deberá calcularse, utilizando la condición mencionada. En este caso particular: $x \geq 0 \Rightarrow Dom\, f =$…………………………….

Clasificación de Funciones

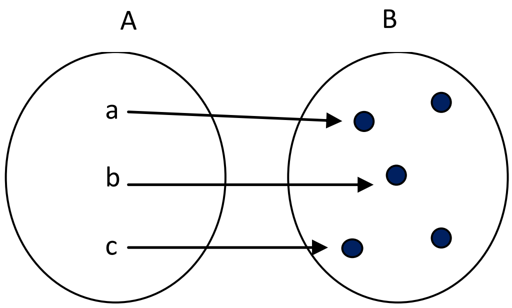
Inyectividad: Sea f una función, $f : A \to B$

Se dice que, *f* es una ***función inyectiva*** si………………………………………………………………………………

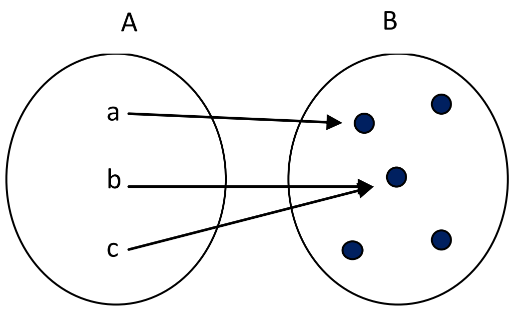
………

En símbolos: $f\ es\ inyectiva \;\Leftrightarrow\; \forall\, a, b \in A \;\Rightarrow\; f(a) \neq f(b)$

Ejemplos:



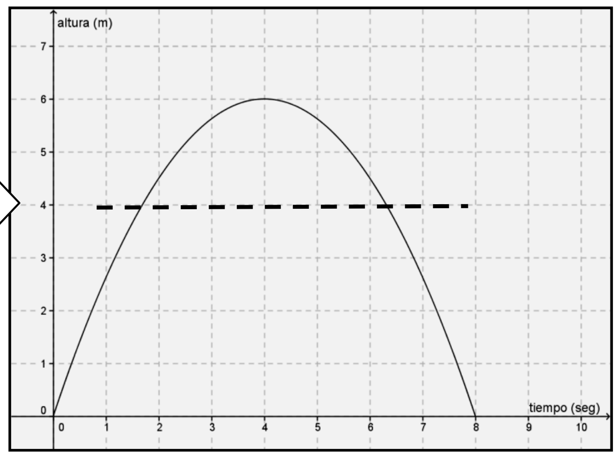
A cada punto del codominio llega a lo sumo una flecha.
INYECTIVA



A un punto del codominio llegan dos flechas. Un punto es imagen de dos elementos del dominio.
NO INYECTIVA

REGLA PRÁCTICA:

Para analizar la Inyectividad de una función en un gráfico, basta con trazar rectas imaginarias paralelas al eje x. Si dichas rectas, cortan en más de un punto a la curva, significa que la función **no** es inyectiva.



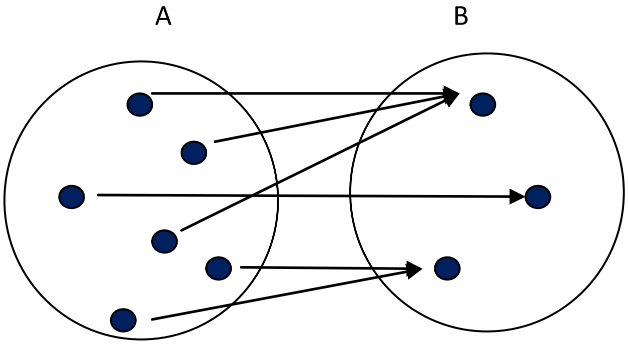
Suryectividad

Sea f una función, $f : A \to B$

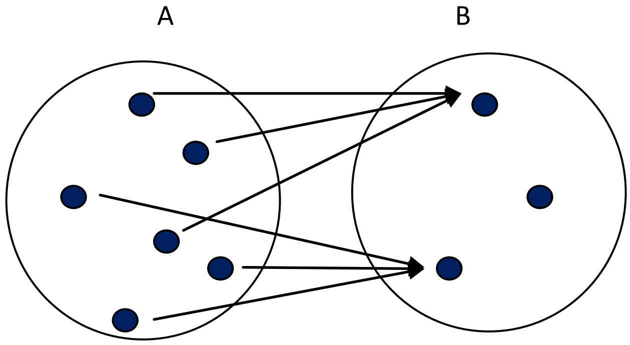
Se dice que, *f* es una ***función suryectiva*** cuando………………………………………………………………………

En símbolos $Im\,f = B$

Ejemplos:



A todos los elementos del codominio llega por lo menos una flecha.
SURYECTIVA

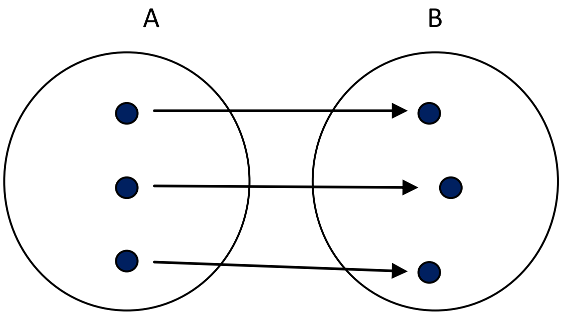


Elementos del codominio quedan sin relacionar.
NO SURYECTIVA

Biyectividad

Sea f una función, $f : A \to B$ se dice que, f es una ***función biyectiva*** si es inyectiva y suryectiva.

Ejemplo:



Conclusiones

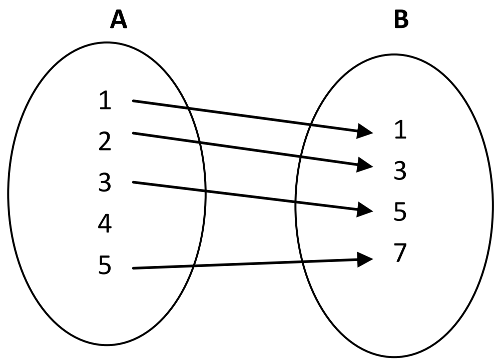
- ✓ Para que la función sea inyectiva, las imágenes no deben repetirse; pero pueden quedar elementos libres.
- ✓ Para que la función se suryectiva, las imágenes pueden repetirse; pero no pueden quedar elementos libres.
- ✓ Para que la función sea biyectiva, las imágenes no deben repetirse y además no pueden quedar elementos libres.

TRABAJO PRÁCTICO N° 1

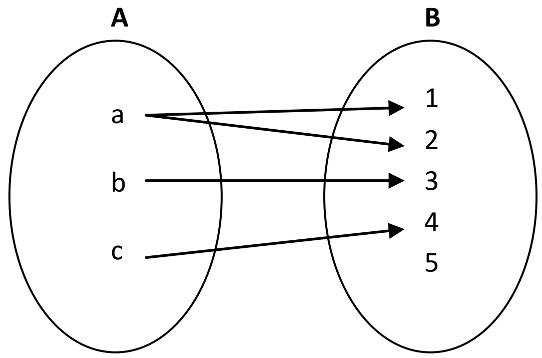
FUNCIONES. DEFINICIÓN. CLASIFICACIÓN.

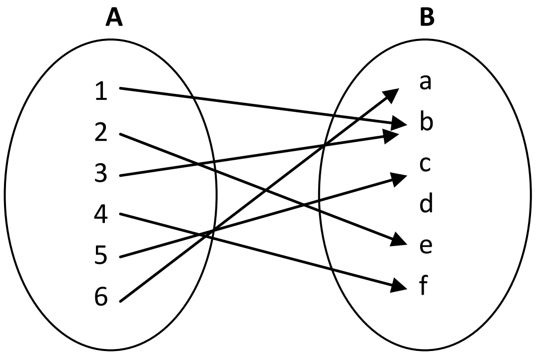
1) Indica cuáles de las siguientes relaciones $\mathbb{R} : A \to B$ son funciones y justificar.

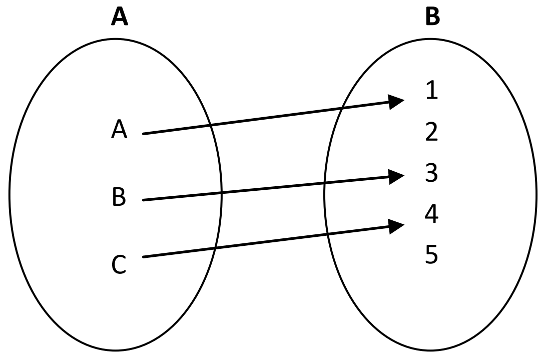
a)



b)

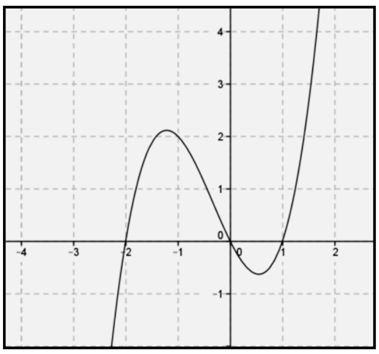




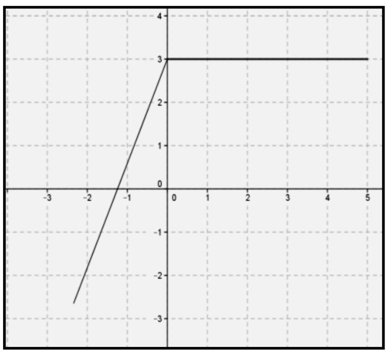


2) Analizar cuáles de las siguientes gráficas corresponden a funciones de $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$

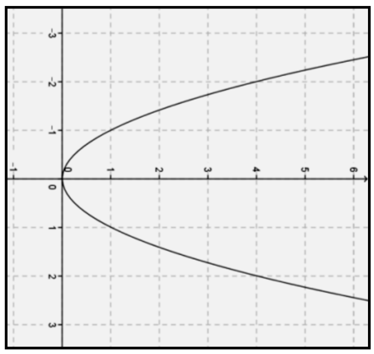
a)



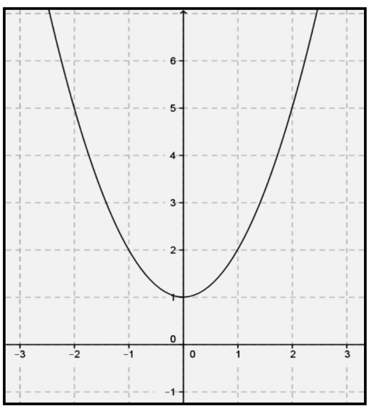
b)



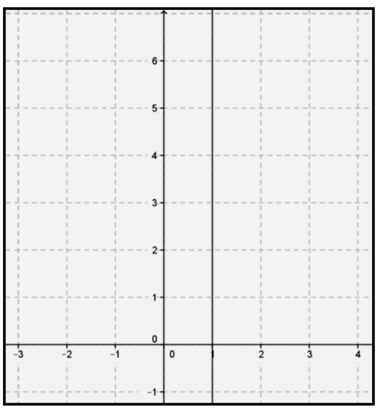
c)



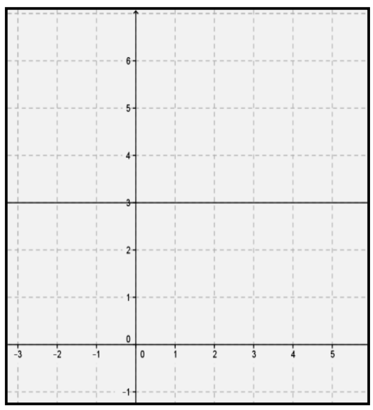
d)



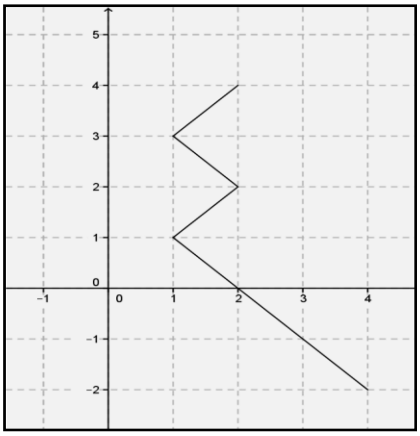
e)



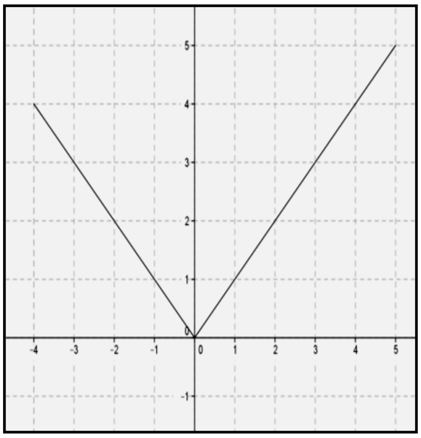
f)



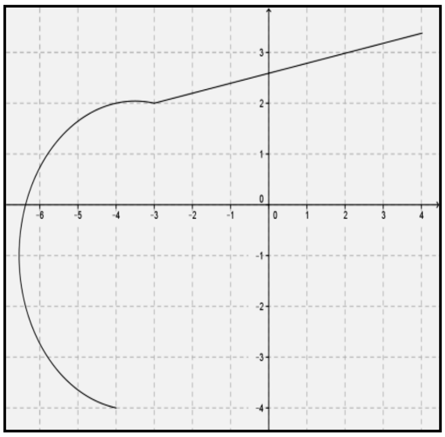
g)



h)



i)



3) Indica dominio e imagen de las funciones correspondientes al ejercicio 2.

4) Redefine el dominio y/o codominio de los ítems c) e i) del ejercicio 2, para que pasen a ser funciones.

5) Sea la función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} / f(x) = 2x - 4$,

a) Hallar las imágenes de: -2; $6{,}6$; $\frac{1}{4}$; 3^{-1}; y 0

b) Hallar las preimágenes de: -5; $0{,}8$; 0; 15; y $\left(\frac{4}{9}\right)^{-1/2}$

6) Sea la función $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R} / g(x) = x^2$,

a) ¿Cuál es la imagen de 3? ¿Y de -4?

b) ¿Qué preimagen tiene 16? ¿Y 9? ¿Cuál es la preimagen de 0?

c) ¿Existe la preimagen de 12? ¿Por qué?

7) Calcular el dominio de las funciones racionales:

$I)\ f(x) = \dfrac{3}{x-4}$ $\quad II)\ g(x) = \dfrac{1}{5x-5}$ $\quad III)\ h(x) = \dfrac{9}{3x^2 - 21}$ $\quad IV)\ k(x) = \dfrac{8}{2x - 0{,}5}$

8) Sea la función $h : A \to B / h(x) = \sqrt{x}$,

a) ¿Los reales negativos pertenecen al dominio de esta función? ¿Por qué?

b) ¿Cuál es la imagen de h(x)?

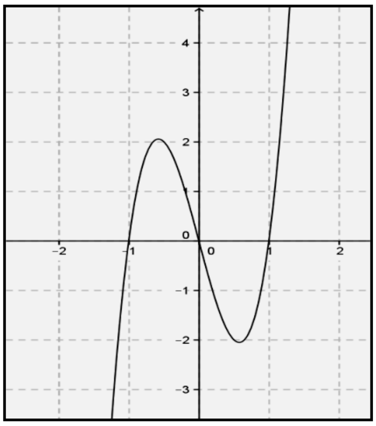
c) Indicar analíticamente el dominio de las funciones. Graficarlas e indicar su imagen.

$I)\ f(x) = \sqrt{-3-x}$ $\quad II)\ h(x) = \sqrt{3x+15}$ $\quad III)\ k(x) = \sqrt{8-2x}$

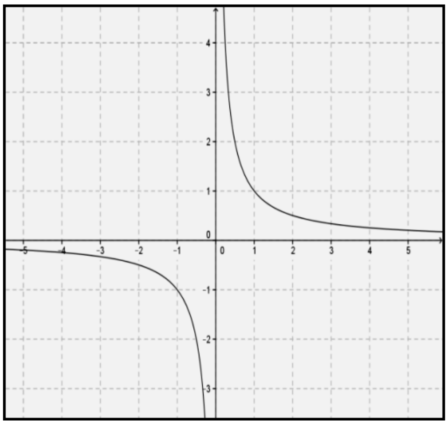
9) Graficar la función que a cada número entero le hace corresponder su cuadrado disminuido en cuatro unidades y luego la función que a cada número real le hace corresponder su cuadrado disminuido en cuatro unidades. ¿Qué diferencia hay entre los gráficos? ¿El punto $(\sqrt{2}; 2)$ pertenece a ambos gráficos?

10) Dadas las siguientes gráficas funcionales, determinar el conjunto de ceros, de positividad y negatividad, intervalos de crecimiento y decrecimiento, de cada una:

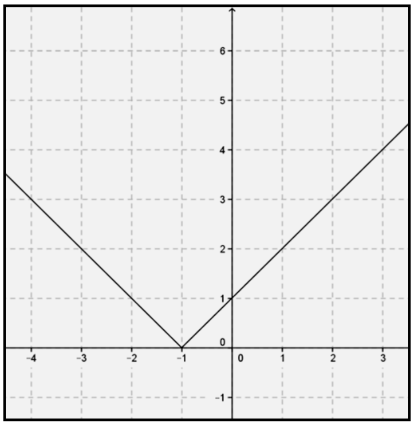
a)



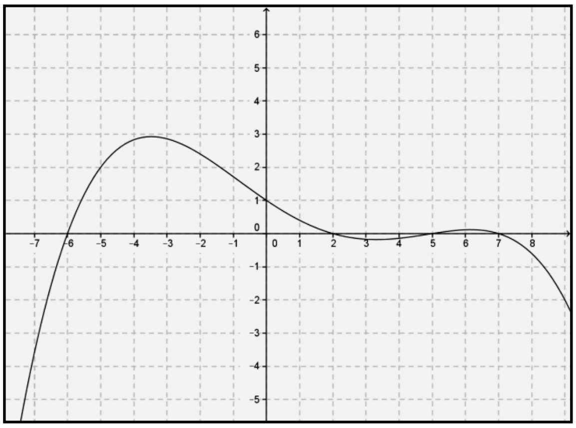
b)



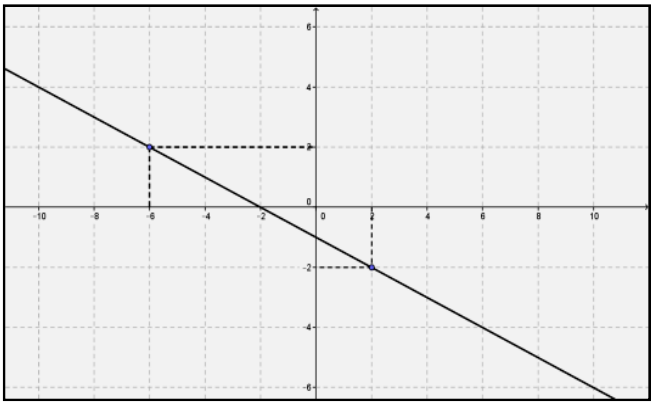
c)



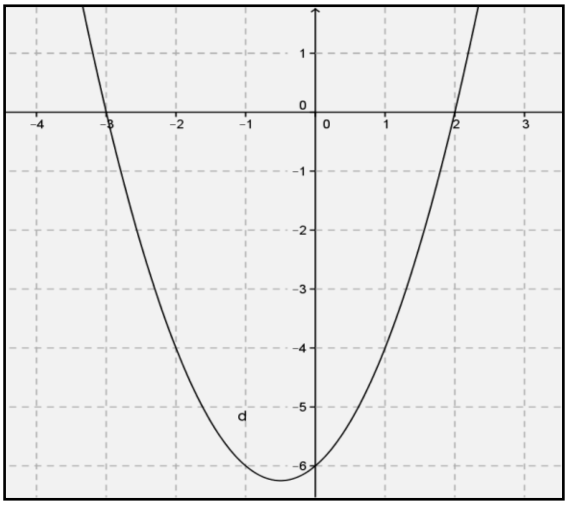
d)



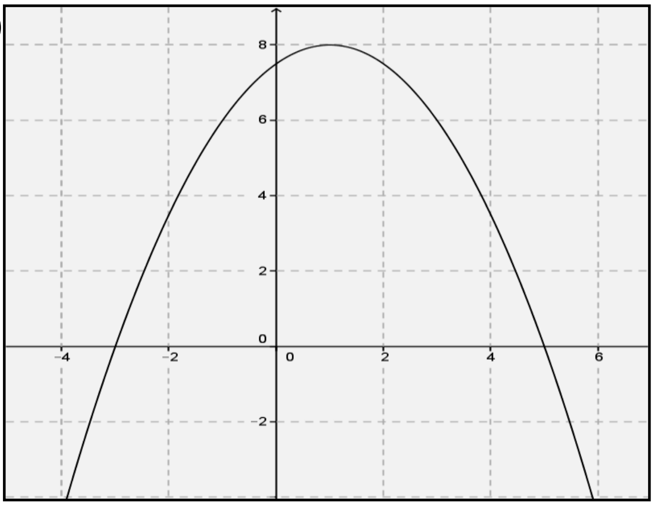
e)



f)



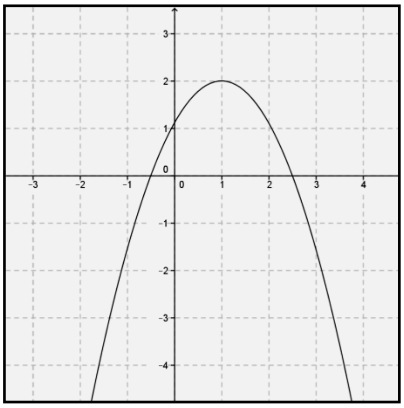
g)



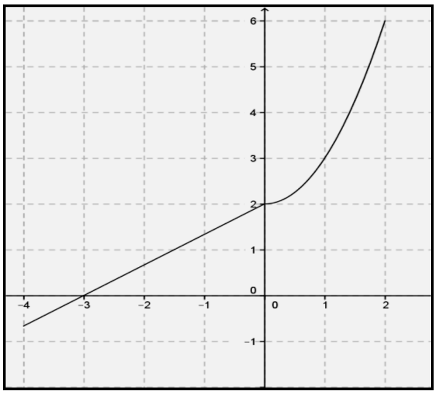
11) Dadas las gráficas de las siguientes funciones $f: A \to \mathbb{R}$

a) Indicar dominio e imagen.
b) Conjuntos de ceros, positividad y negatividad.
c) Intervalos de crecimiento y decrecimiento.
d) Analiza la biyectividad.
e) Según el análisis, redefine dominio y/o codominio para que resulten biyectivas.

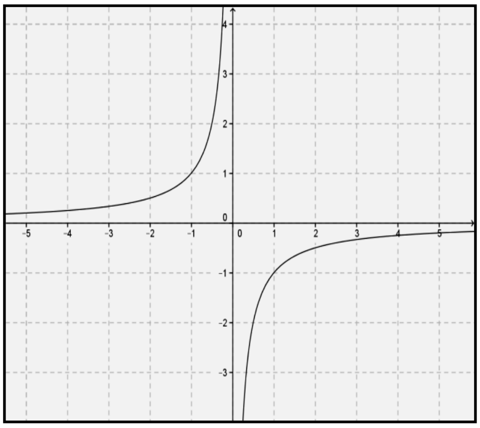
a)



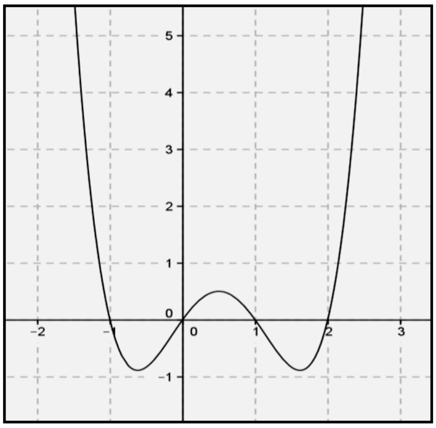
b)



c)



d)



12) Dadas las siguientes funciones, determinar si son inyectivas (I), suryectivas (S) , biyectivas (B) o ninguna (N).
   a) $f:\ \mathbb{R} \to \mathbb{R}/f(x) = -3x + 1$
   b) $f:\ \mathbb{R} \to \mathbb{R}/f(x) = |x|$
   c) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}/f(x) = x^2$
   d) $f:\ \mathbb{R} \to [0;\infty)/f(x) = |x|$
   e) $f:\ \mathbb{R} \to \{2\}/f(x) = 2$
   f) $f: (-\infty; 0] \to \mathbb{R}/f(x) = x^2$

13) Sea el conjunto $A = \{1,2\}$ y el conjunto $B = \{a, b, c\}$
   a) ¿Puedes establecer una función inyectiva $f: A \to B$? ¿Cuántas funciones inyectivas puedes definir?
   b) ¿Puedes establecer una función suryectiva $f: A \to B$? ¿Por qué?
   c) ¿Puedes establecer una biyección? ¿Por qué?

14) Sea la función $f: A \to \mathbb{R}/f(x) = x^2 + 2$

Indicar para cuales de los siguientes conjuntos A, *f* es una función inyectiva. Justificar la respuesta.
   a) $A = [-2; 2]$
   b) $A = \mathbb{R}$
   c) $A = [0; \infty)$
   d) $A = [-4; -1]$
   e) $A = \mathbb{R}^+$

15) Sea la función $f : \mathbb{R} \to B / f(x) = x^2 + 2$

Indicar para cuales de los siguientes conjuntos B, f es una función suryectiva. Justificar la respuesta.

a) $B = (2; \infty)$

b) $B = \mathbb{R}$

c) $B = \mathbb{R}^+$

d) $B = \mathbb{R}^- \cup \{0\}$

e) $B = [2; \infty)$

CLAVE DE RESPUESTAS

Ejercicio 1)

a) NO b) NO c) SI d) SI

Ejercicio 2)

a) SI b) SI c) NO d) SI e) NO f) SI g) NO h) SI i) NO

Ejercicio 3)

$a)\ Dom\ f = \mathbb{R}$
$Im\ f = \mathbb{R}$

$b)\ Dom\ f = \mathbb{R}$
$Imf = (-\infty; 3]$

$d)\ Dom\ f = \mathbb{R}$
$Im\ f = [1; \infty)$

$f)\ Dom\ f = \mathbb{R}$
$Im\ f = \{3\}$

$h)\ Dom\ f = \mathbb{R}$
$Imf = [0, \infty)$

Ejercicio 5)

a)

-8 9,2 -7/2 -10/3 -4

b)

x =-1/2 x = 12/5 x = 2 x = 19/2 x = 11/4

Ejercicio 6)

a) 9 y 16
b) ± 4 ; ± 3; 0
c) $x = 2\sqrt{3} \in \mathbb{I}$

Ejercicio 7)

$I)\ Dom\ f = \mathbb{R} - \{4\}$
$II)\ Dom\ g = \mathbb{R} - \{1\}$
$III)\ Dom\ h = \mathbb{R} - \{-\sqrt{7}; \sqrt{7}\}$
$IV)\ Dom\ k = \mathbb{R} - \left\{\frac{1}{4}\right\}$

Ejercicio 8)c)

$Dom\ f = (-\infty; -3]$
$Dom\ h = [-5; \infty)$
$Dom\ k = (-\infty; 4]$

Ejercicio 12)

a) B
b) N
c) N
d) S
e) S
f) I

Ejercicio 13)

g) Sí. Se pueden definir 6.
h) No
i) No

Ejercicio 14)

Inciso c) y e)

Ejercicio 15)

Inciso e)

FUNCIÓN CUADRÁTICA (I)

Analizar el problema presentado a continuación

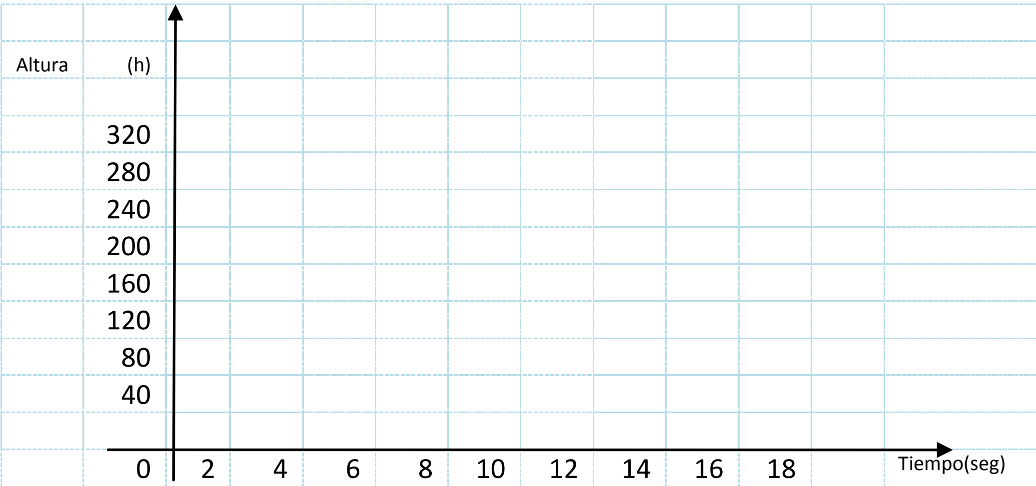
Disparo de emergencia

Desde un barco que se halla en situación de emergencia, se efectúa un disparo, en forma vertical, con una pistola de señales. El destello podrá verse desde la base naval más cercana únicamente mientras se encuentre a una altura no menor de 195 metros sobre el nivel del mar. Los técnicos que integran la tripulación estiman que, de acuerdo con las características de la pistola de señales y con las condiciones en que se dispara, la altura del destello estará dada por la siguiente fórmula: $h(t) = 80t - 5t^2$ donde ***"h"*** es la altura sobre el nivel del mar, en metros, y ***"t"*** es el tiempo transcurrido, en segundos, desde el momento del disparo.

Actividad: Completen la tabla de valores y marquen los puntos en el gráfico. Luego respondan las siguientes preguntas.

a) ¿Durante cuánto tiempo el destello permanece en el aire?
b) ¿Cuál es la altura máxima que alcanza el destello? y ¿En qué momento alcanza dicha altura?
c) ¿En qué momento obtiene una altura de 195 m? ¿Durante cuánto tiempo será visible desde la base naval más cercana?
d) ¿A qué altura se encuentra el destello 1 seg antes de alcanzar la máxima altura?
e) ¿En qué momento vuelve a estar a esa misma altura?
f) Desde otro punto más lejano, la señal es visible mientras se encuentra a una altura no menor de 300 m. ¿Podrá verse desde allí?, si es así, ¿durante cuánto tiempo será visualizada?

TIEMPO (SEG)	ALTURA (M)
0	
2	
3	
4	
6	
8	
10	
12	
13	
14	
16	



FUNCIÓN CUADRÁTICA

Llamamos función cuadrática a toda función de la forma $f(x) = ax^2 + bx + c$ donde a, b y $c \in \mathbb{R}$, y $a \neq 0$. Esta expresión es la forma polinómica de la función cuadrática. La variable independiente debe estar elevada al cuadrado.

Los términos de esta expresión se denominan: $f(x) = \underline{ax^2} + \underline{bx} + \underline{c}$

Término …………………… Término ………… Término ………………………………..

Coeficientes
- a → Coeficiente…………………………………..
- b → Coeficiente…………………………………..
- c → Coeficiente…………………………………..

Nota: Diferenciar el término del coeficiente.

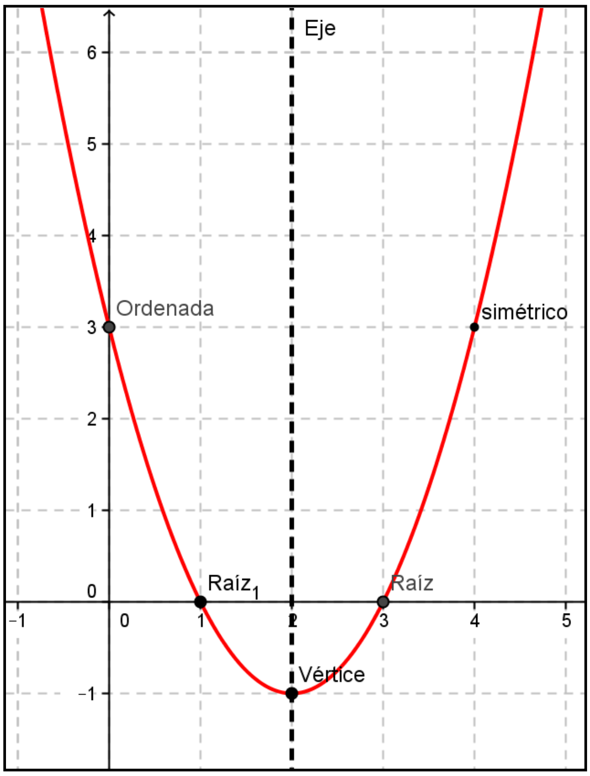
Una función cuadrática puede ser completa o incompleta.

En símbolos	Ejemplos
Completa: $f(x) = ax^2 + bx + c$	
Incompleta:	
$f(x) = ax^2$ falta el término lineal y el término independiente	
$f(x) = ax^2 + bx$ falta el término independiente	
$f(x) = ax^2 + c$ falta el término lineal	

El término cuadrático no puede faltar.

La representación gráfica de una función de segundo grado es una curva simétrica,……………………………………..

Características de la Parábola



Esta parábola representa a la función $f(x) = x^2 - 4x + 3$

Las parábolas son curvas simétricas, respecto de una recta imaginaria perpendicular al eje x, llamada……………………………….., que pasa por la abscisa del vértice.

El ***vértice***, también llamado extremo de la función, representa el valor…………………………………………………que alcanza la función; dependiendo de la orientación de las ramas. Si las ramas van hacia arriba, se trata de un………………; de lo contrario es un………………………………

La intersección de la curva con el eje de ordenadas (o sea el eje y) se denomina………………………………… y siempre coincide con el coeficiente independiente, o sea, $f(0) = c$.

La intersección de la curva con el eje de abscisas (eje x) se denomina…………………………………. Puede ocurrir que la parábola tenga dos raíces, una o ninguna.

Todo punto de la curva, con excepción del vértice,………………………………………………………………………………

Las funciones cuadráticas presentan un tramo en el que son……………………………y otro en el que son……………………………. El valor del dominio, donde se produce el cambio entre el crecimiento y decrecimiento, es la……………………………………….

En cambio,…………………………., si las hay, determinan el pasaje del conjunto de ***positividad*** al de ***negatividad*** o viceversa.

El coeficiente cuadrático determina la concavidad de la parábola. Es decir:

- Si **a > 0**, las ramas van hacia……………………., o sea, es cóncava positiva.
- Si **a < 0**, las ramas van hacia……………………., o sea, es cóncava negativa.

Además:

- Si **0 < a < 1** las ramas se "abren", es decir, tienden a……………………………………………………………
- Si **a > 1** las ramas se "cierran", es decir, tienden a……………………………………………………………

Construcción del gráfico de la función cuadrática. Para graficar una función aprovecharemos las características particulares de la parábola:

d) …………………………………….
e) …………………………………….
f) …………………………………….
g) …………………………………….

- ***Vértice***: El vértice es un punto que pertenece a la parábola, como tal, posee dos coordenadas $(x_v; y_v)$, siendo x_v: $la\ abscisa\ del\ vértice$ e y_v: $la\ ordenada\ del\ vértice$

  - Para hallar la abscisa del vértice, utilizamos una de estas dos fórmulas:

$$x_v = \frac{-b}{2a} \qquad o \qquad x_v = \frac{x_1 + x_2}{2}$$

  - Para hallar la ordenada del vértice, utilizamos una de estas dos fórmulas:

$$y_v = f(x_v) \qquad o \qquad y_v = -\frac{b^2}{4a} + c$$

- ***Ecuación del eje de simetría:*** El eje de simetría es una recta, por lo tanto se expresa a través de una ecuación, y como ya se dijo, atraviesa la parábola por la abscisa del vértice, en consecuencia, la ecuación del eje de simetría coincide con esta abscisa.

$$x = x_v$$

- ***Ordenada al origen:*** siempre es el punto $(0; c)$. En el caso que se trate de una fórmula incompleta, c = 0

- ***Raíces o Ceros***: Las raíces de una función se obtienen……………………………………………………………; de esta manera se transforma en una ecuación, pero, como no puede aplicarse el pasaje de términos, es necesario aplicar una fórmula que se llama……………………………………, y en ella intervienen únicamente los coeficientes……………………….

$$\boldsymbol{x_{1;2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}}$$

Ejemplo:

$$f(x) = -2x^2 + 5x - 2$$

$$-2x^2 + 5x - 2 = 0$$

$$a = -2 \qquad b = 5 \qquad c = -2$$

$$x_{1;2} = \frac{- \qquad \pm \sqrt{\qquad - 4.(\quad).(\quad)}}{2.(\quad)}$$

$$x_{1;2} = \frac{\pm\sqrt{\qquad\qquad}}{\qquad} = \frac{\pm\sqrt{\quad}}{\qquad}$$

$$x_{1;2} = \frac{-5 \pm 3}{-4}$$

$$x_1 = \frac{-5+3}{-4} \quad y \quad x_2 = \frac{-5-3}{-4}$$

$$x_1 = \frac{-2}{-4} = \frac{1}{2} \quad y \quad x_2 = \frac{-8}{-4} = 2$$

Dos raíces reales distintas

ECUACIONES CUADRÁTICAS

Las ecuaciones, se trabajan algebraicamente, hasta que se llega a la expresión más reducida e igualada a cero. Luego se resuelven de la misma manera que se calculan los ceros en la función; según sean completas o incompletas.

Trabajo Práctico N° 1

Función Cuadrática(I)

1) Graficar y analizar completamente las siguientes funciones:

$a)\ f(x) = -x^2 + 12x - 36$

$b)\ f(x) = 5x^2 - 10x + 1$

$c)\ f(x) = 4x^2 - 1$

$d)\ f(x) = -x^2 + 3x$

$e)\ f(x) = -\frac{1}{2}x^2 + \frac{3}{2}$

$f)\ f(x) = x^2 + x + 1$

$g)\ f(x) = 2x^2 + 4x - \frac{5}{2}$

$h)\ f(x) = x^2 - 4x + 4$

$i)\ f(x) = -x^2 + 4x$

$j)\ f(x) = -\frac{1}{4}x^2$

$k)\ f(x) = x^2 - 5x + 8$

$l)\ f(x) = -x^2 + 2x + 3$

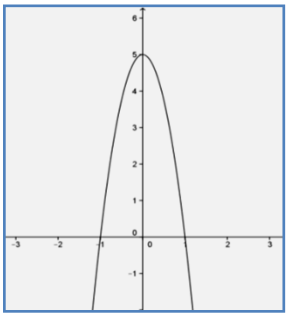
2) Dada la función $f:\ \mathbb{R} \to \mathbb{R}\ /\ f(x) = 3x^2 + 1$

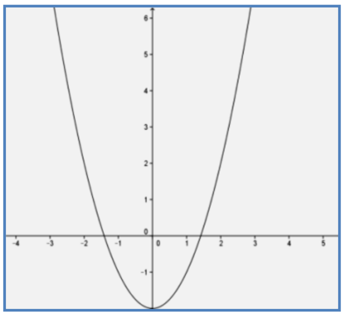
a) Calcular $f(-3),\ f(\sqrt{6})\ y\ f(4^{-1})$

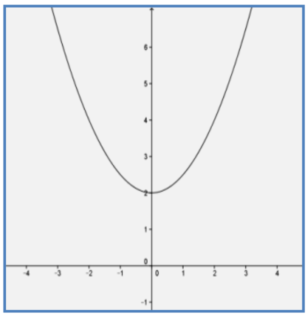
b) Indicar, de ser posible, los valores de x para los cuales se verifique: $f(x) = 0,\ \ f(x) = 48,$ $f(x) = -2\ \ y\ \ \ f(x) = f(2)$

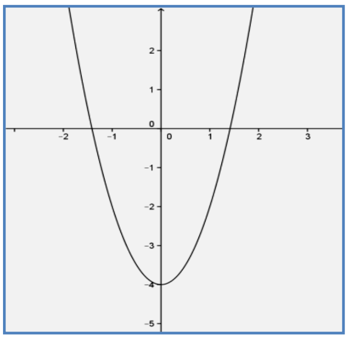
3) Relacionar cada gráfico con la fórmula correspondiente.

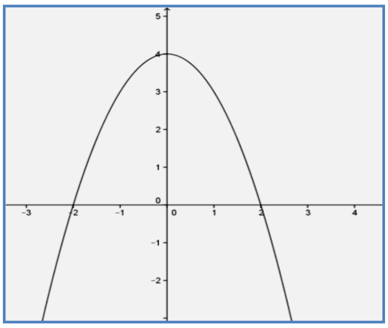
$a)\ y = \frac{1}{2}x^2 + 2 \qquad b)\ y = 2x^2 - 4 \qquad c)\ y = -x^2 + 4 \qquad d)\ y = -5x^2 + 5 \qquad e)\ y = x^2 - 2$

I) 

II) 

III) 

IV) 

V) 

4) Encuentra analíticamente:

a) El valor de ***b*** para que la función $f(x) = -\frac{1}{3}x^2 + bx - 4$ pase por el punto $Q = (3; 5)$

b) Los valores de ***b*** y ***c*** para los cuales los puntos (1; 0) y (-1; 6) pertenezcan a la gráfica de $f(x) = x^2 - bx + c$

c) El valor de ***b*** para que la parábola $y = x^2 + bx + 3$ tenga el vértice en el punto (2; -1)

d) Determinar el valor de ***a*** para que la función $y = ax^2 + 2x - 3$ tenga la abscisa del vértice igual a 2.

5) Un grupo de biólogos estudia las características de un lago artificial en el cual introdujeron un conjunto de peces para analizar su evolución. En un principio, la colonia crece reproduciéndose normalmente, pero al cabo de unos meses algunos peces mueren, a causa del hacinamiento. Los registros indican que el conjunto de peces evoluciona según la ley $n(x) = 240 + 10x - 0{,}1x^2$, donde ***x*** representa los días que han transcurrido y ***n*** la cantidad de peces. Con esta proyección pronto se extinguirán.

Sobre la base de la función dada por ese científico, responder:

a) ¿Cuántos peces introdujeron en el lago?

b) ¿Durante cuánto tiempo la cantidad de peces fue aumentando?

c) ¿Cuál fue la cantidad máxima de peces que hubo en el lago? ¿En qué momento se produjo tal situación?

d) ¿Luego de cuánto tiempo se extinguiría la población?

6) Completar las siguientes proposiciones respecto de la gráfica de $f(x)=ax^2 + bx + c$; escribiendo las condiciones sobre los coeficientes a, b y c.

a) El vértice es un mínimo, entonces…………………………………………………………..

b) El eje de simetría es x = 0; luego……………………………………………………………….

c) Interseca al eje "y" en 3, luego…………………………………………………………………

d) El vértice es el punto (0,0); luego……………………………………………………………

e) Corta al eje "x" en dos puntos, luego……………………………………………………..

f) No tiene su vértice sobre el eje "y"; luego…………………………………………….

7) Resolver las siguientes ecuaciones:

$a)\ \dfrac{x+3}{3} = \dfrac{4}{4-x}$ $\quad b)\ (x+6)(x-6) = 133$ $\quad c)\ 3(x^2-1) - 2(x^2+2) = 18$

$d)\ \dfrac{10x^2-2x}{3x+1} = 3x-1$ $\quad e)\ 2x^2 + 2 = 0$ $\quad f)\ 2x^2 = 12x$

$g)\ 18x(0{,}25x - 5) = 0$ $\quad h)\ 5(1-x)^2 = -10(x+1)$ $\quad i)\ (x-2)^2 + (x-3)^2 = 181$

Clave de respuestas

Ej. 2)	a) 28	19	7/4		
	b) $\nexists x \in \mathbb{R}$	$\pm\frac{\sqrt{141}}{3}$	$\nexists x \in \mathbb{R}$	± 2	
Ej. 3)	a) III	b) IV	c) V	d) I	e) II
Ej. 4)	a) b=4	b) b=3 c=2	c) b=-4	d) a=-1/2	
Ej. 5)	a) 240	b) 50	c) 490-50	d) 120	
Ej. 7)	a) $S = \{0,1\}$	b) $S = \{-13,13\}$	c) $S = \{5,-5\}$	d) $S = \{1\}$	e) $\nexists x \in \mathbb{R}$
	f) $S = \{0,6\}$	g) $S = \{0,20\}$	h) $\nexists x \in \mathbb{R}$	i) $S = \{-7,12\}$	

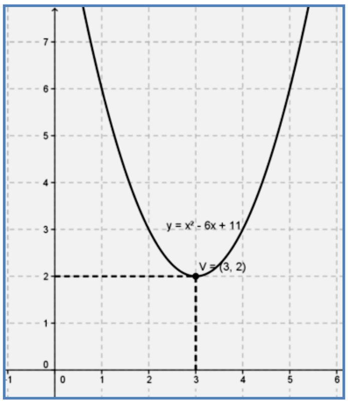
Función Cuadrática (II)

Otras formas de expresar la función cuadrática.

Forma Canónica

Una función cuadrática puede escribirse en forma canónica; en dicha expresión intervienen……………………….
……

$$\boldsymbol{f(x) = a(x - x_v)^2 + y_v}$$



Por ejemplo: $\underbrace{f(x) = (x - 3)^2 + 2}$

x_v $\qquad$ y_v

En el gráfico de la función, notarás que la abscisa del vértice es………………………., en cambio en la fórmula aparece………………………….
esto ocurre como consecuencia del signo negativo de la fórmula.
Esto sucede **SIEMPRE** con la abscisa, en cambio la ordenada del vértice mantiene su signo.
En el ejemplo, el coeficiente cuadrático es…………………………………………….
Si se quiere obtener las raíces de la función, sólo debemos igualar a cero la misma y convertirla en una ecuación. $\quad (x - 3)^2 + 2 = 0$

……………………………………………………

…………………………………………………..

…………………………………………………..

Como se ve en la representación gráfica, la función no posee raíces reales (no corta al eje de abscisas).

Esto quiere decir que no necesito pasar a la expresión…………………………………… de la función para hallar las raíces.

Pasaje de forma canónica a forma polinómica

Para pasar de una forma a la otra, solamente debemos operar algebraicamente la expresión, es decir, separar en términos, desarrollar el cuadrado de binomio y reducir al mínimo la expresión.

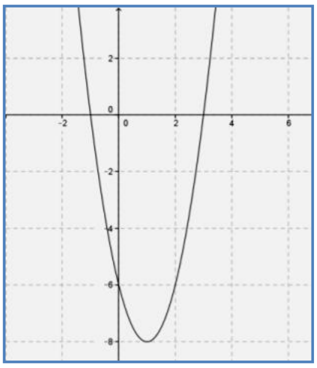
$f(x) = (x - 3)^2 + 2$
……………………………………………………………………….
……………………………………………………………………….
………………………………………………………………………. Forma polinómica

Forma Factorizada

Una función cuadrática puede escribirse en forma factorizada, si posee raíces; en dicha expresión también interviene el ……

Esta es la fórmula:

$$\boldsymbol{f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)}$$



Ejemplo:
$f(x) = 2(x + 1)(x - 3)$
Observa que las raíces de la función son $x_1 = -1 \ y \ x_2 = 3$, pero en la expresión factorizada aparecen con el signo contrario, esto sucede por efecto del signo negativo de la fórmula.

Pasaje de forma factorizada a forma polinómica

Para realizar el pasaje debe aplicarse la propiedad distributiva de la multiplicación.
$f(x) = 2(x + 1)(x - 3)$

………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………..

…………………………………………………………………………….. Forma polinómica

DISCRIMINANTE

Ya hemos visto, al calcular las raíces de una función, que pueden suceder tres casos:

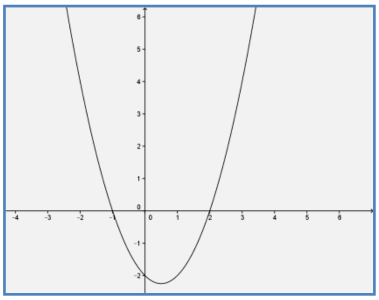
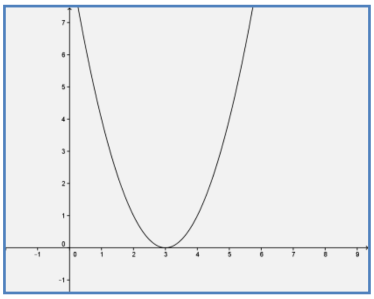
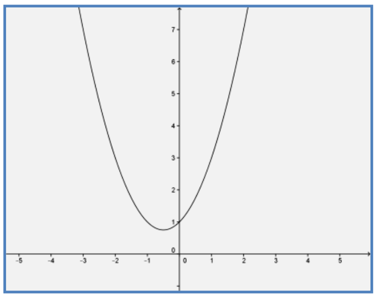
a) que la parábola corte al eje de abscisas……………………………………………………..
b) que la parábola corte al eje de abscisas……………………………………………………..
c) que la parábola……………. corte al eje de abscisas.

El discriminante es la expresión algebraica que permite conocer …………………………………………………………que tiene la función cuadrática, o el tipo de soluciones que posee una ecuación de segundo grado; sin necesidad de conocer el valor de las mismas. Se simboliza con la letra griega delta mayúscula.

$$\boldsymbol{\Delta = b^2 - 4ac}$$

Observar que se trata de la expresión que se encuentra dentro de la raíz cuadrada, en la fórmula resolvente, en la que intervienen los tres parámetros de la forma polinómica de la función.

El resultado del discriminante es…………………………………………………………………………., entonces, vamos a establecer las tres situaciones que pueden presentarse, según el signo de dicho número.

$\Delta > 0$	$\Delta = \mathbf{0}$	$\Delta < 0$
		
La ecuación tiene dos raíces reales distintas.	***La ecuación tiene una raíz real, llamada raíz doble.***	***La ecuación no tiene raíces reales.***
La función…………………………en dos puntos el eje de abscisas.	***La función…………………… en un solo punto el eje de abscisas.***	***La función…………… el eje de abscisas.***

Trabajo Práctico N° 4
Función Cuadrática(II)

1) Hallar las coordenadas del vértice de las siguientes funciones cuadráticas y escribe luego su forma canónica.

$a)\ f(x) = -2x^2 + 4x - 6$ $\quad b)\ f(x) = -x^2 + 5x$ $\quad c)\ f(x) = 4x^2 - 9$

$d)\ f(x) = -\frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{2}x + 2$ $\quad e)\ f(x) = -2(x+1)(x-3)$ $\quad f)\ f(x) = \frac{1}{4}(x+1)^2 - 3$

2) Indicar si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas, justificando en cada caso.

a) El punto $P = (-1; 1)$ pertenece a la gráfica de la función $f(x) = -x^2$

b) El vértice de la función cuadrática $f(x) = \frac{2}{5}(x-3)^2 - 2$ es el punto $(3;\ -2)$

c) La forma factorizada de la función cuadrática $f(x) = 3x^2 - 4x + 1$ está dada por $f(x) = (x-1)(x - \frac{1}{3})$

3) De las siguientes funciones expresadas en forma factorizada:

a) Indicar las raíces

b) Obtener su forma polinómica.

$f_1(x) = (x-2)(x+4)$ $\quad f_2(x) = 2(x-1)(x-3)$ $\quad f_3(x) = (x+5)^2$ $\quad f_4(x) = x(x-3)$

4) De las siguientes funciones expresadas en forma canónica:

a) Indicar el vértice de cada función

b) Hacer el pasaje a forma polinómica.

$f_1(x) = (x+2)^2 - 16$ $\quad f_2(x) = 2(x-3)^2 - 2$ $\quad f_3(x) = 4\left(x + \frac{1}{2}\right)^2$

5) Completar la tabla.

Forma polinómica	***Forma factorizada***	***Forma canónica***
$f(x) = \frac{1}{2}x^2 + x - 12$		
	$g(x) = 3(x-2)(x-1)$	
		$h(x) = 3(x+2)^2 - 3$
		$k(x) = (x+1)^2$

6) a) Escribir la forma factorizada de la función $y = 2(x-1)^2 - 8$ sin hallar previamente la forma polinómica.

b) Escribir la forma polinómica de la función hallada en el inciso anterior.

7) Hallar la forma canónica de la función cuyas raíces son: $x_1 = -4$ y $x_2 = 0$, cuya gráfica pasa por el punto (2; -6).

8) Determinar la ecuación de la función cuadrática empleando la forma más conveniente, en cada caso.

a) El coeficiente cuadrático es -2 y el vértice es (-3; 4)
b) El coeficiente cuadrático es 2, corta al eje de ordenadas en 9 y pasa por el punto (-1; 3)
c) El vértice es $V = (2; 3)$ y pasa por el punto (4; -7)
d) El coeficiente cuadrático es -1, el eje de simetría es x = 2 y la ordenada al origen es 5.
e) Las raíces son -4 y 6; y a = -1/3.
f) Tiene por vértice de su parábola asociada $V = (-1; 5)$ y una de sus raíces es x = 4
g) $|a| = 3,\ C^- = (-\infty; -4) \cup (1; \infty)\ \ y\ \ C^+ = (-4; 1)$

9) Indicar el tipo de raíces de las funciones, utilizando el discriminante.

$a)\ y = x^2 + 13x + 12$ $\qquad b)\ y = x(x+2) - 5$ $\qquad c)\ f(x) = (2x-3)^2$

10) Hallar, si existe, $k \in \mathbb{R}$ para que se cumpla la condición solicitada en cada caso:
a) La función $f(x) = -x^2 + x - k$ tiene una raíz doble.
b) La ecuación $3x^2 + k = 0$ no tiene solución en $\mathbb{R}$.
c) El gráfico de la función $g(x) = -kx^2 + 1$ interseca al eje de las abscisas en dos puntos.
d) El gráfico de las funciones de la forma $f(x) = -x^2 - kx - 5$ tiene contacto con el eje x, pero no lo atraviesa.

11) Los registros de temperatura tomados entre las 0 hs y las 24 hs en una zona rural se ajustan a la función: $T(x) = -\frac{1}{10}(x-12)^2 + 10$ (Donde T = temperatura en °C y x = hora del día). Responder:
a) ¿Cuál fue la máxima temperatura?
b) ¿A qué hora se registró?
c) ¿Cuándo la temperatura fue de 0°C?
d) ¿Qué temperatura había a las tres de la tarde?

12) Al poner a prueba un nuevo automóvil se comprobó que para velocidades mayores que 10 km/h y menores que 150 km/h, el rendimiento de combustible ***r*** (en km/litro) está relacionado con la velocidad ***v*** (en km/h) mediante la función $r(v) = 0{,}002v.(180 - v)$.
Determinar a qué velocidad el rendimiento es máximo y calcular dicho rendimiento.

13) Escribir la expresión de una función cuadrática, para cada inciso, que cumpla los requisitos:

a) V = (1; 2) y contiene al punto (2; -5)
b) V = (2; 7) y la ordenada al origen es y = -3
c) Su gráfica interseca al eje y en 2 y al eje x en 5. Además x = 1 es raíz de la función.

14) Hallar la fórmula de la función cuadrática en forma canónica, si se sabe que el punto (0; 4) pertenece a la gráfica de dicha función y que, además la abscisa del vértice es 3 y el coeficiente cuadrático es -1/2.

15) ¿Cuál de los siguientes intervalos es el conjunto imagen de la función $f(x) = 4x^2 - 4x - 3$? Recuadrar la opción correcta.

$a)\ [4; \infty)$ $\qquad b)\ (-\infty; -4]$ $\qquad c)\ (-\infty; 4]$ $\qquad d)\ [-4; \infty)$

16) Responder:

a) La abscisa del vértice de la parábola correspondiente a la función cuadrática $f(x) = ax^2 + bx$ es 1. ¿Cuáles son las raíces de f?

b) Se sabe que el eje de simetría de una función cuadrática f es x = 3, y que una de sus raíces es 9/2. ¿Para qué valores de x se tiene que f(x)=0?

c) Una de las raíces de la función $g(x) = k(x+5)^2 - 6$ es 2. ¿Cuál es el valor de k? ¿Cuál es el valor de la otra raíz?

d) ¿Cuál es la fórmula de la función cuadrática, si el punto (0; 4) pertenece a la gráfica de dicha función y que, además la abscisa del vértice es 3 y a = -1

Clave de respuestas

Ejercicio 1)

a) V (1; -4)

b) V (5/2; 25/4)

c) V (0;-9)

d) V (-1; 9/4)

e) V (1; 8)

f) V (-1; -3)

Ejercicio 2)

a) F

b) V

c)F

Ejercicio 3)

$f_1(x) = x^2 + 2x - 8$

$f_2(x) = 2x^2 - 8x + 6$

$f_3(x) = x^2 - 3x$

Ejercicio 4)

$f_1(x) = x^2 + 4x - 12$

$f_2(x) = 2x^2 - 12x + 16$

$f_3(x) = 4x^2 + 4x + 1$

Ejercicio 5)

$f(x) = \frac{1}{2}(x-4)(x+6)$
$f(x) = \frac{1}{2}(x+1)^2 - \frac{25}{2}$

$g(x) = 3x^2 - 9x + 6$
$g(x) = 3(x - \frac{3}{2})^2 - \frac{3}{4}$

$h(x) = 3x^2 + 12x + 9$
$h(x) = 3(x+1)(x+3)$

$k(x) = x^2 + 2x + 1$
$k(x) = (x+1)^2$

Ejercicio 6)

$y = 2(x-3)(x+1)$

$y = 2x^2 - 4x - 6$

Ejercicio 7)

$y = -\frac{1}{2}(x+2)^2 + 2$

Ejercicio 8)

$a)\ y = -2(x+3)^2 + 4$

$b)\ y = 2x^2 + 8x + 9$

$c)\ y = -\frac{5}{2}(x-2)^2 + 3$

$d)\ y = -x^2 + 4x + 5$

$e)\ y = -\frac{1}{3}(x+4)(x-6)$

$f)\ y = -\frac{1}{5}(x+1)^2 + 5$

$g)\ y = -3(x+4)(x-1)$

Ejercicio 9)

$a)$ *Dos raíces* $\mathbb{R}$

$b)$ *Dos raíces* $\mathbb{R}$

$c)$ *Una raíz doble*

Ejercicio 10)

$a)\ k = \frac{1}{4}$

$b)\ k \in (0; \infty)$

$c)\ k \in (0; \infty)$

$d)\ k_1 = 2\sqrt{5}$ v $k_2 = -2\sqrt{5}$

Ejercicio 11)

$a)$ 10°C

$b)$ 12 *hs.*

$c)$ 2 *hs.* y 22 *hs*

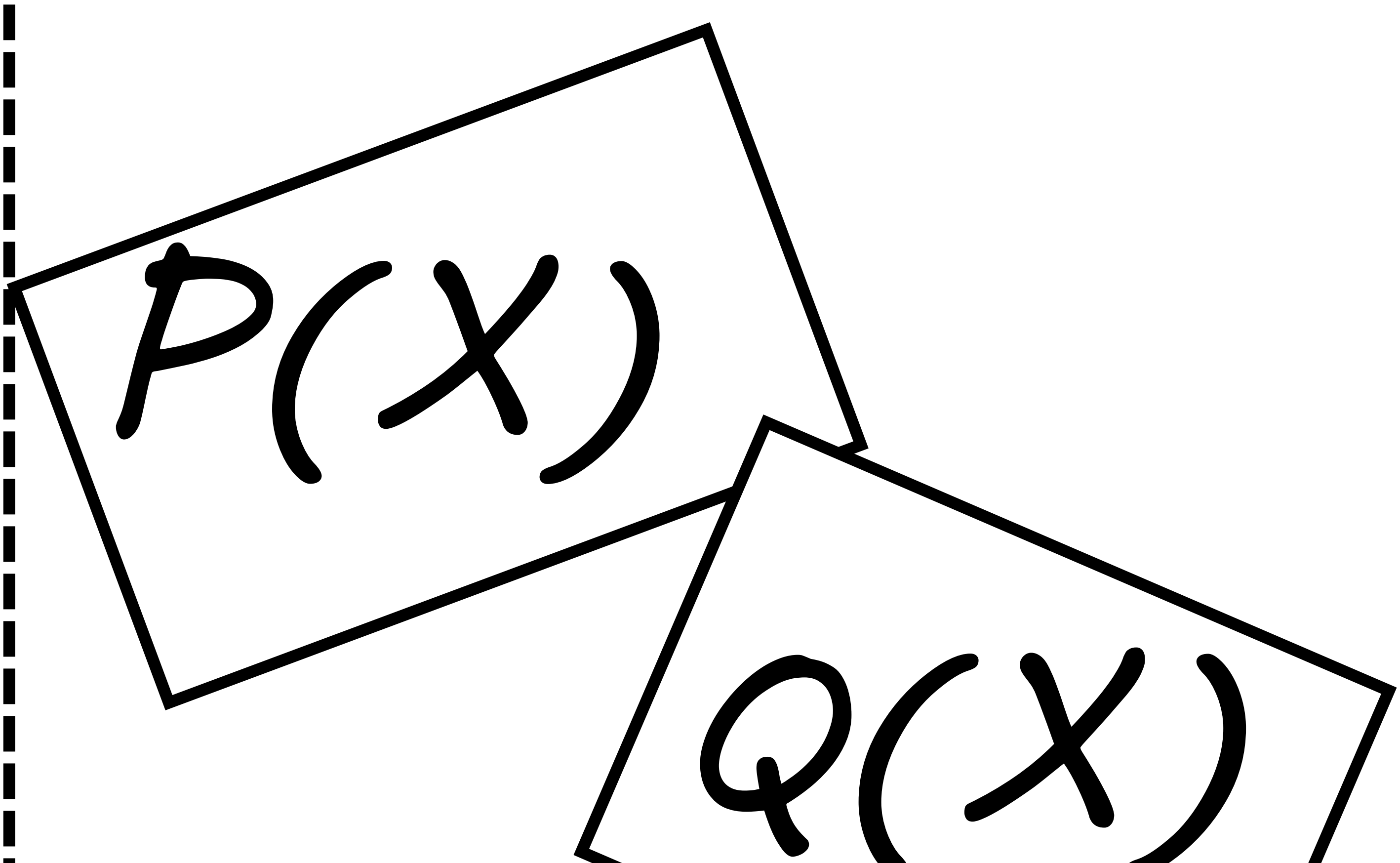
$d)$ 9,1°C

Ejercicio 12)

$90\ {}^{km}/_{h}$ y $16{,}2\ {}^{km}/_{l}$

Unidad 3

Polinomios



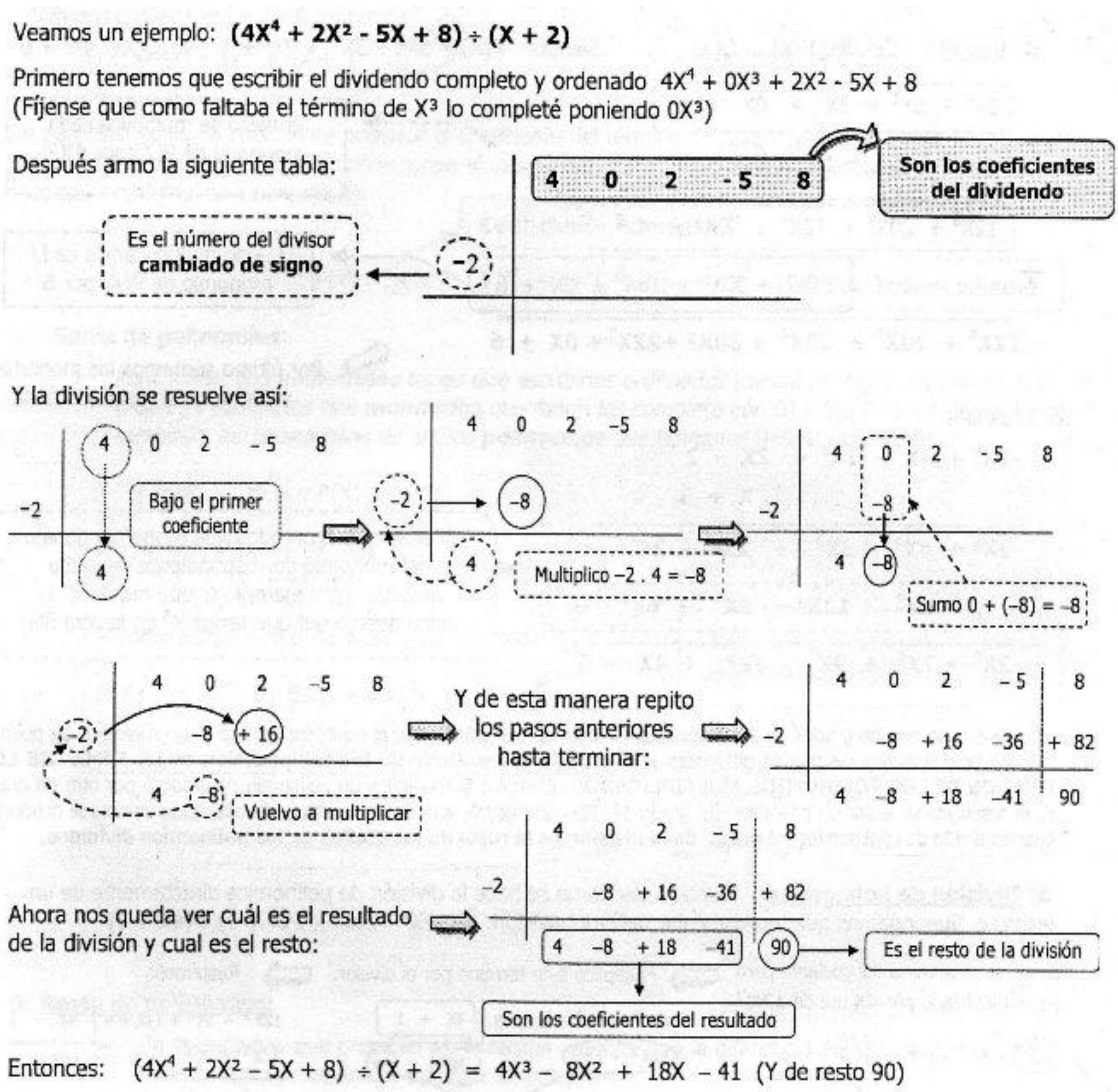
Para recordar:

- <u>División de polinomios</u>

Dividir un polinomio $D(x)$ llamado dividendo, por otro $d(x)$, llamado divisor, es encontrar dos expresiones algebraicas $C(x)$ y $R(x)$, llamada cociente y resto respectivamente; tales que el dividendo es igual al producto del divisor por el cociente, más el resto. Y el grado del resto menor que el grado del divisor.

$$D(x) = d(x).C(x) + R(x)$$

<u>Regla de Ruffini:</u> es un método abreviado para realizar divisiones en los que el divisor es de la forma (x+a) con a $\in \mathbb{R}$



♦ Teorema del Resto

El resto de la división de un polinomio entero en x por otro de la forma (x + a) es el valor numérico del polinomio dividendo para x = - a

El teorema del Resto sirve para calcular el resto de una división sin tener que hacer la misma. Por lo tanto es muy útil para establecer si dos polinomios son divisibles. En el caso tratado anteriormente procedemos así:

$P(x) = 4x^4 + 2x^2 - 5x + 8$

$P(-2) = 4(-2)^4 + 2(-2)^2 - 5(-2) + 8$

$P(-2) = 4.16 + 2.4 + 10 + 8 = 90$

POLINOMIOS: FACTORIZACIÓN.

Recordemos algunas cuestiones básicas sobre polinomios.

Una expresión algebraica es una combinación finita de letras, números o números y letras ligados entre sí por una adición, sustracción, producto o cociente, radicación p potenciación. Los números se denominan **coeficientes** (excepto los exponentes de las potencias) y las letras, **variables** o indeterminadas.

$$a)\ \frac{3-0{,}5w}{2}\quad b)\ \ 3x^2-4\quad c)\ \sqrt{a}+2^3\quad d)\ 4x^{1/2}+3\quad e)\ \sqrt{3}x+2x^3$$

Cuando la variable no está afectada por una raíz, por una potencia negativa o no actúa como divisor las expresiones algebraicas se denominan **polinomios.** En los ejemplos dados no son polinomios las expresiones c) y d) porque ……………………………………………………………

En clase:

Identificar cuáles de las siguientes expresiones algebraicas son polinomios, explicando por qué no lo son las descartadas:

a) $P(x) = \frac{x}{2} - 2x^2$

b) $Q(x) = 2$

c) $R(x) = x.(x-1)^2$

d) $H(x) = -x^6 + 10 - x^{-4}$

e) $S(x) = 2 + x^{-1}$

f) $T(x) = -x^6 + 10 - x^4 + x^6$

g) $W(x) = \frac{2x+x^3}{x}$

h) $Y(x) = \sqrt{5x} + 2$

i) $A(x) = 6x^3 + 2$

j) $D(x) = -2x^2 + 3x + 1$

k) $M(x) = \sqrt{3}x + 1$

l) $J(x) = -3.x^{\frac{1}{3}} + 5$

Las cosas por su nombre:

Identificaremos en un polinomio cada componente:

Veamos un ejemplo:

$$D(x) = -5x^2 + 3x + 1$$

- Grado de un polinomio: lo indica la potencia más grande, siempre que su coeficiente no sea nulo. En este caso el polinomio del ejemplo es de grado ……….
- Coeficiente principal: es el coeficiente que acompaña a la variable con mayor exponente. En este caso el C.P es ……………….
- Término independiente: es aquel que no depende de la variable, en este caso es ………….
- Además diremos que un polinomio está ordenado, si sus potencias decrecen en un órden numérico.

Ejemplos:

$D(x) = -5x^2 + 3x + 1$ está ordenado

$A(x) = -5x^3 + 3x^2 + 2x^4 + 1$ no está ordenado

- Un polinomio además estará completo, si cuenta con todos los exponentes desde el que indica el grado hasta el término independiente

$A(x) = -5x^3 + 3x^2 + 2x^4 + 1$ no está completo

$B(x) = 2x^3 - 6x^2 + 4x - 9$ está completo

En ciertas ocasiones necesitaremos que el polinomio esté ordenado y completo, por lo que completaremos con las potencias que faltan pero con coeficientes cero, para no modificar el polinomio:

$A(x) = -5x^3 + 3x^2 + 2x^4 + 1$ no está completo ni ordenado

$A(x) = 2x^4 - 5x^3 + 3x^2 + \mathbf{0x} + 1$ está completo y ordenado

En clase:

Completar el siguiente cuadro:

	Grado	C.P	T.i	¿Está ordenado?	¿Está completo?
$P(x) = 3x^3 + x^2 - 12x - 4$					
$P(x) = x^3 - x^4 - 7x - 3$					
$P(x) = x^2 + 6x^3 - 8 + 2x$					
$P(x) = -x^7 + x^2 - x - 4$					
$P(x) = x^3 + x^5 - 2x$					
$P(x) = -2x^4 + 3x^2 - x - 4$					
$P(x) = 4$					

♦ Raíz de un polinomio

Definición: Un valor real de x es ***raíz*** de P(x) si, y sólo si el polinomio se anula para ese valor.
En símbolos: a $\in \Re$ es raíz $\Leftrightarrow$ P(a) = 0

Por Ejemplo: Sea el polinomio $P(x) = x^2 + 7x + 10$

Consideramos $x = 2 \quad \Rightarrow \quad P(2) =$……………………………….

$P(2) =$……….. $\Rightarrow x = 2$…………………………………………….

Tomamos $x = -5 \quad \Rightarrow \quad P(-5) =$…………………………….

$P(-5) =$………… $\Rightarrow x = -5$ ……………………………………………………

♦ Teorema Fundamental del Álgebra (TFA)

Un polinomio P(x) de grado n, tiene exactamente n raíces.

Este Teorema afirma que, por ejemplo, si el $gr[P(x)] = 5$, entonces $P(x)$ posee cinco raíces. Pero el Teorema se refiere a las raíces reales y no reales (o sea, otros números que no son reales). Como consecuencia, puede afirmarse que:

Un polinomio P(x) de grado n, tiene como máximo n raíces reales

En este curso, estudiaremos sólo las raíces reales de un polinomio.

FACTORIZACIÓN DE POLINOMIOS

Factorear es transformar un polinomio en el producto de otros polinomios, del menor grado posible. Este procedimiento resulta útil para resolver ecuaciones o simplificar expresiones algebraicas. En nuestro caso, utilizaremos la factorización para calcular la cantidad de raíces de un polinomio y el valor de cada una de ellas.

La factorización no siempre es posible. Cuando un polinomio no puede descomponerse en un producto de polinomios, se llama ***primo o irreducible.***

Todo polinomio P(x) de grado 1 de la forma (x ± a) es primo.

$Ej: P(x) = x - 3$ $\quad Q(x) = x + 4$ $\quad R(x) = x + 1$ $\quad S(x) = -\frac{1}{2} + x$

Todo polinomio P(x) de grano n, que tenga n raíces reales puede factorearse como:

$$P(x) = a_n(x - r_1).(x - r_2)\ \dots\dots.(x - r_n)$$

$$a_n\ es\ el\ coeficiente\ principal\ de\ P(x)$$

$$r_1 \dots\dots r_n\ son\ las\ n\ raíces\ reales\ de\ P(x)$$

Veamos un ejemplo de un polinomio factorizado:

$$P(x) = \overbrace{2x^3 - 14x + 12}^{\text{Forma Polinómica}} = \overbrace{2.\,\underbrace{\underbrace{(x-1)}.\underbrace{(x-2)}.\underbrace{(x+3)}}_{\text{Factores Mónicos}}}^{\text{Forma Factorizada}}$$

$\boxed{\text{Coeficiente Principal}}$

.... Se aplica propiedad distributiva de la

.... multiplicación para desarmar los

.... factores y transformar la expresión

.... en sumas y restas.

....

Observación: De la forma factorizada del polinomio podemos extraer las raíces, igualando cada factor a cero y resolviendo la ecuación.

$$\begin{array}{lll} x-1=0 & x-2=0 & y \quad x+3=0 \\ x=1 & x=2 & \quad\;\; x=-3 \end{array}$$

Pueden verificar que son raíces, aplicando el teorema del resto.
Conclusiones:

- ✓ Se obtuvieron...
- ✓ El polinomio sigue siendo el mismo,...
- ✓ En el polinomio factorizado siempre aparece.. multiplicando a los polinomios..

♦ Multiplicidad de las Raíces

La multiplicidad de una raíz en un polinomio es la cantidad de veces que aparece el mismo valor, en su expresión factorizada.

Por ejemplo: $P(x) = 3.(x-1).(x+2).(x+2).(x+2).(x-5).(x-5)$ los factores repetidos pueden expresarse

como potencias $P(x) = 3.(x-1).(x+2)^3.(x-5)^2$
Entonces:

$3\ es\ el\ coeficiente\ principal$

$x = 1\ es\ raíz \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ porque\ aparece\ un\ solo\ factor\ con\ ese\ valor.$

$x = -2$ *es raíz de multiplicidad ……………………* *porque aparecen tres factores con ese valor.*

$x = 5$ *es raíz de multiplidad ……………………………. porque aparecen dos factores con ese valor.*

CASOS DE FACTOREO

POLINOMIOS DE GRADO UNO

Los polinomios de grado uno son de la forma $P(x) = ax + b$; por lo tanto, para hallar la única raíz que posee, planteamos la ecuación $ax + b = 0$ y despejamos la x, entonces $x = \frac{-b}{a}$

Ejemplo: $\quad P(x) = 3x - 4 \quad \Rightarrow \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots = 0$

…………………………

$$\Rightarrow \ \mathrm{x} = \frac{4}{3} \ \ es\ la\ raíz\ de\ P(x)$$

Entontes el polinomio factoreado se expresa así: $\boxed{\boldsymbol{P(x) = 3.\left(x - \frac{4}{3}\right)}}$

Coeficiente Principal

Factor mónico

POLINOMIOS DE GRADO DOS

Los polinomios de segundo grado son de la forma $P(x) = ax^2 + bx + c$; por lo tanto, para hallar las dos raíces se resuelve la ecuación aplicando la fórmula resolvente. Si las raíces son números reales puede expresarse el polinomio factorizado de la siguiente manera: $\boldsymbol{a.(x - x_1).(x - x_2)}$

Ejemplo: $\quad Q(x) = 2x^2 + 5x + 2 \quad planteamos\ la\ ecuación\ \ 2x^2 + 5x + 2 = 0$

$$aplicamos\ fórmula\ resolvente\ \ x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$\Rightarrow \ x_1 = \frac{-1}{2} \ \ y \ \ x_2 = -2 \ \ son\ las\ raíces\ de\ Q(x)\ que\ \ puede\ factorizarse\ así:$$

$$\boxed{\boldsymbol{Q(x) = 2.\left(x + \frac{1}{2}\right).(x + 2)}}$$

POLINOMIOS DE LA FORMA $P(x) = x^n \mp k$ (CON N IMPAR)

Veamos cómo se factoriza el polinomio $P(x) = x^3 - 8$. Como podemos observar, este polinomio tiene grado tres, pero está incompleto, es decir le faltan los términos en grado dos y en grado uno. Esto nos permite en primera instancia averiguar de forma fácil una de sus tres raíces. Para ello lo igualaremos a cero y despejaremos x

$$x^3 - 8 = 0$$

$$x^3 = 8$$

$$x = \sqrt[3]{8}$$

$x = 2$ (primera raíz del polinomio)

Para hallar las otras dos aplicaremos la división por Riffini, dado que ya encontramos una de sus raíces. Recordemos completar el polinomio:

	1	0	0	-8
2		2	4	8
	1	2	4	$\boxed{0}$

Luego al aplicar fórmula resolvente con el polinomio $x^2 + 2x + 4$ encontraremos si existen las dos raíces restantes. Como en este caso este polinomio no tiene raíces reales, no será posible escribirlo en forma factorizada, por lo que el polinomio original quedará escrito de la siguiente manera en forma factorizada:

P(x)= (x-2).($x^2 + 2x + 4$)

TEOREMA DE GAUSS

Carl Friedrich Gauss fue un matemático alemán (1777-1855), que desarrollo un teorema, el cual, enuncia una propiedad de notable utilidad práctica; dado que posibilita conocer cuáles son todas las "posibles raíces racionales" de un polinomio de cualquier grado de coeficientes enteros y término independiente no nulo.

<u>Teorema de Gauss</u>

*Si un polinomio **P(x)**, de grado n con coeficientes enteros y término independiente no nulo, admite una raíz racional **p/q (fracción irreducible),** entonces **p** es divisor del término independiente y **q** es divisor del coeficiente principal.*

Por ejemplo, dado el polinomio $P(x) = 3x^3 + x^2 - 12x - 4$, que tiene todos sus coeficientes enteros y el término independiente es distinto de cero.

$$P(x) = 3x^3 + x^2 - 12x - 4$$

Divisores del coeficiente principal

$q = |3 = \{\dots\dots\dots\dots\dots\}$

Divisores del término independiente

$p = |4 = \{\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots.\}$

Realizamos el cociente entre cada uno de los elementos del conjunto p, con cada uno de los elementos del conjunto q y obtenemos el conjunto de "Posibles raíces de P(x)".

Posibles Raíces Racionales

$$\frac{p}{q} = \{\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots..\}$$

Como puede verse la cantidad de "posibles raíces" excede la cantidad de raíces del polinomio ya que a lo sumo puede tener tres raíces, porque es de grado tres. Para saber qué valor cumple la condición de ser raíz debemos aplicar Teorema del resto con cada una, hasta que consigamos un primer valor que anule el polinomio.

Probamos con x = 1, o sea: $P(1) \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots. \Rightarrow x = 1 \;\; no\ es\ raíz$

Probamos con x = -1, o sea: $P(-1) \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots..$

Probamos con x= $-\frac{1}{3}$*, o sea:* $P\left(-\frac{1}{3}\right) = \cdots \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots..$

$$\Rightarrow x = -\frac{1}{3} \quad es\ raíz$$

Al encontrar una raíz del polinomio, lo dividimos por dicho valor, aplicando la Regla de Ruffini, porque ésta nos permite bajar un grado el polinomio original, y tal vez, aplicar otro caso de factoreo. Si no es así, seguiremos probando con las otras posibles raíces.

$$\begin{array}{c|cccc}
 & 3 & 1 & -12 & -4 \\
-\frac{1}{3} & & & & \\
\hline
 & & & & \\
\end{array}$$

Ahora podemos expresar el polinomio factoreado: $P(x) = \left(x + \frac{1}{3}\right).(3x^2 - 12)$

En el segundo término aplicamos formula resolvente, ya que se trata de un polinomio de grado 2

¡Pistas para reconocer y aplicar este caso de factoreo!

- ✓ ***No importa la cantidad de términos del polinomio. Debes verificar que sus coeficientes sean números enteros y tenga término independiente.***
- ✓ ***Después que encuentras el primer valor que cumple la condición de ser raíz y reduces un grado el polinomio, debes tener la precaución de volver a considerar dicho valor como posible raíz; recuerda la multiplicidad de una raíz.***
- ✓ ***Si el polinomio es mónico, sus posibles raíces son los divisores del término independiente.***
- ✓ ***Recuerda que por este teorema solo obtenemos las raíces racionales, y un polinomio puede tener raíces irracionales que debemos hallar aplicando otro caso de factoreo de los que vimos. En el caso de las raíces no reales, dejaremos expresado el polinomio.***

FACTOR COMÚN

En un polinomio, cada término está compuesto por factores: un factor numérico y/o un factor literal, (se llaman factores porque siempre un número y una letra juntos se están multiplicando).

Por lo tanto, extraer factores en común (es decir, que se encuentre en todos los términos a la vez) consiste en…….

……..

Se trata de aplicar la propiedad recíproca de la distributiva de la multiplicación con respecto a la adición y sustracción.

Ejemplos:

$a)\ A(x) = 2x^6 + 3x^5 + x^4$ $A(x) = x^4.(\dots\dots\dots\dots\dots\dots.\dots\dots)$	Observamos que entre los coeficientes, el dcm es…….. Por lo tanto, no es necesario escribirlo. Entre las variables,………………………………………………………. y la escribimos fuera multiplicando al paréntesis, donde anotaremos el resultado que queda luego de extraer dicha variable. Podemos verificar, aplicando……………………………………………………………. que volvemos a la expresión original. El polinomio ya está factoreado, o sea expresado como producto.
$b)\ B(x) = -12x^3 + 28x - 4$ $B(x) = 4.(\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots)$ o $B(x) = -4.(\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots.)$	En este caso, al buscar los factores en común, puede observarse ……………………………………., en cambio la variable no es común a todos los términos, en consecuencia, sólo extraemos el factor numérico. Incluso, el factor numérico puede extraerse con ambos signos (positivo o negativo). Lo haremos de las dos formas. No olvidar aplicar regla de signos de la multiplicación.

$c)\ C(x) = 12x^2 - 9x^5 + 6x^8$ $C(x) = 3x^2.(\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots)$	En este caso, observamos que entre los coeficientes, el dcm =………… y entre las variables, la de menor exponente es……………., entonces podemos extraer ambos factores. Es una combinación de los dos casos anteriores.

Siempre que sea posible, se debe sacar como factor común al coeficiente principal

¡Pistas para reconocer y aplicar este caso de factoreo!

- ✓ ***No importa la cantidad de términos del polinomio. Puede aplicarse a binomios, trinomios, cuatrinomios, etc.***
- ✓ ***Debes identificar el dcm entre los coeficientes de los términos. Si es el uno, no hace falta escribirlo.***
- ✓ ***Debes verificar si la variable está en todos los términos. Si así ocurre, tomar la que tenga menor exponente.***
- ✓ ***Puedes elegir el signo del factor en común.***
- ✓ ***Dentro del paréntesis deben quedar la misma cantidad de términos que posee el polinomio original.***
- ✓ ***Siempre puedes controlar el producto obtenido aplicando la propiedad distributiva de la multiplicación.***

DIFERENCIA DE CUADRADOS

En primer lugar, recordemos ¿qué es un cuadrado perfecto?

Un cuadrado perfecto es el resultado de multiplicar una expresión por sí misma, o, elevarla al cuadrado, que es lo mismo. Por ejemplo: $5\,.\,5 = 5^2 = 25 \Rightarrow 25 \quad es\ un\ cuadrado\ perfecto$

$$\sqrt{6}\,.\sqrt{6} = \left(\sqrt{6}\right)^2 = 6 \Rightarrow 6 \quad es\ un\ cuadrado\ perfecto$$

$$x\,.\,x = x^2 \Rightarrow x^2 \quad es\ un\ cuadrado\ perfecto$$

$$x^3.\ x^3 = x^6 \Rightarrow x^6 \quad es\ un\ cuadrado\ perfecto$$

<u>Observación:</u> Si una expresión es un cuadrado perfecto, puede calcularse la base original, invirtiendo la operación; es decir calculando la raíz cuadrada a la expresión.

Por ejemplo: $\sqrt{16x^6} = 4x^3 \qquad o \qquad \sqrt{\frac{9}{25}x^2} = \frac{3}{5}x$

Bien, volvamos al caso de factoreo.

<u>¡Pistas para reconocer y aplicar este caso de factoreo!</u>

- ✓ **Puede aplicarse únicamente a binomios, o sea expresiones de dos términos.**
- ✓ **Uno de los términos debe ser negativo y otro positivo. No importa el orden en que aparezcan los signos.**
- ✓ **Ambos términos deben ser cuadrados perfectos, (coeficientes y parte literal).**
- ✓ **Debes calcular las bases de dichos cuadrados.**

<u>Ejemplos</u>:

$P(x) = x^2 - 9$ $\qquad$ $P(x) = x^4 - 16$ $\qquad$ $P(x) = x^6 - 81$

Bases

$P(x) = x^2 - \frac{9}{4}$ $\qquad$ $P(x) = x^2 - 5$ $\qquad$ $P(x) = 4x^4 - 81$

Bases

Una vez obtenidas las bases, el polinomio se factoriza como el producto de la suma de las bases por la diferencia de las mismas.

$P(x) = x^2 - 9 = (x + 3).(x - 3)$

$P(x) = x^4 - 16 =$

$P(x) = x^6 - 81=$

$P(x) = x^2 - 5=$

$P(x) = x^2 - \frac{9}{4}=$

.$P(x) = 4x^4 - 81 =$

Puede verificar aplicando la propiedad distributiva.

<u>FACTOR COMÚN POR GRUPOS</u>

Este caso de factoreo se aplica a polinomios que no poseen factores en común; pero presentan una estructura que permite formar <u>***grupos de igual cantidad de términos***</u> y sacar factor común en cada uno de esos grupos.

Ejemplos:

$P(x) = \underbrace{x^4 + 2x^3}_{\text{F.C } x^3} \underbrace{- x - 2}_{\text{F.C } -1}$ $P(x) = x^3.(x+2) - 1.(x+2)$ $P(x) =.(x+2).(x^3-1)$	Si observamos el polinomio, no es posible extraer un factor común a todos los términos. Es por esto que formaremos grupos de igual cantidad de términos En cada uno de esos términos sacaremos un factor común. Observemos que dentro de cada paréntesis quedo exactamente la misma expresión. Esto es lo que se tiene que lograr siempre. A partir de esto, volvemos a extraer ujn factor común, pero en este caso la expresión que está dentro de los paréntesis. Según las expresiones que queden dentro e cada paréntesis, podremos seguir factorizando aplicando otros casos.
$P(x) = 7x^5 - 5x^4 + 14x - 10$ $P(x) = (7x^5 - 5x^4) + (14x - 10)$ $P(x) = x^4.(\dots\dots\dots..) + 2.(\dots\dots\dots)$ $P(x) = (\dots\dots\dots\dots).(\dots\dots\dots..)$	Entre los coeficientes el dcm = 1 y la variable no está en el último término, por lo tanto no hay factores en común. Entonces, armamos dos grupos de dos términos cada uno, mirando que cada grupo tenga factores comunes. En este caso, el primer grupo posee la variable y el segundo grupo tiene un divisor en común. Después de agrupar, todavía puedo separar en términos. Se extrae factor común en cada grupo. Todavía tengo los dos términos, pero debe verificarse que los factores entre paréntesis sean <u>***IGUALES.***</u> Si ello no ocurre, la factorización no puede llevarse a cabo o bien hay que buscar otra forma de agrupar los términos. Al ser iguales los factores, quiere decir que son un factor común a ambos términos, por lo tanto, vuelve a aplicarse este caso por segunda vez. Finalmente, el polinomio queda factorizado pues ya no se puede separar en términos. Puede verificarse aplicando distributiva.

¡Pistas para reconocer y aplicar este caso de factoreo!

- ✓ ***Para aplicar este caso la cantidad de términos del polinomio debe ser mayor o igual a 4, y cantidades que puedan dividirse en partes iguales.***
- ✓ ***No puede aplicarse en binomios, trinomios, polinomios de 5 o 7 términos, etc.***
- ✓ ***Una vez armados los grupos, se aplican las técnicas del factor común.***

Combinación de casos:

Factoricemos el siguiente polinomio aplicando los casos vistos hasta el momento:

Ejemplo 1:

$Q(x) = x^3 - 3x^2 - 4x + 12$

Aplicamos factor común por grupos

$Q(x) = x^2.(x-3) - 4.(x-3)$

$Q(x) = (x-3).(\quad - \quad)$

En el segundo factor quedó planteada una diferencia de cuadrados, entonces:

$Q(x) = (x-3).(x- \quad).(x+ \quad)$

Y así queda completamente factorizado el polinomio.

Ejemplo 2:

$R(x) = 12x^6 + 8x^5 - 108x^4 - 72x^3$

Aplicamos factor común a todo el polinomio:

$R(x) = 2.x^3.(6x^3 + 4x^2 - 54x - 36)$

Aplicando el Teorema de Gauss obtenemos que una de sus raíces es $x = -\frac{2}{3}$. Aplicamos Regla de Riffini con este valor hallado.

	6	4	-54	-36
$-\frac{2}{3}$		-4	0	36
	6	0	-54	0

Polinomio semi – factorizado:

$R(x) = 2.x^3.\left(x + \frac{2}{3}\right).(6x^2 - 54)$

Sacamos factor común del último término:

$$R(x) = 2.x^3.\left(x + \frac{2}{3}\right).6,(x^2 - 9)$$

Multiplicamos los coeficientes y aplicamos diferencia de cuadrados en el último factor:

$$R(x) = 12.x^3.\left(x + \frac{2}{3}\right).(x \quad - 3).(x + 3)$$

<u>Ejemplo 3:</u>

$$P(x) = 3x^3 + x^2 - 12x - 4$$

Encontramos la primera raíz del polinomio por el Teorema de Gauss (ver ejemplo en explicación del caso)

	3	1	-12	-4
$-\frac{1}{3}$				

Ahora podemos expresar el polinomio factoreado: $P(x) = \left(x + \frac{1}{3}\right).(3x^2 - 12)$

Sacamos factor común del segundo factor $P(x) = \left(x + \frac{1}{3}\right) \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots$
enviamos ese número al principio del polinomio, dado que es el C:P
$P(x) = 3.\left(x + \frac{1}{3}\right) \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots$

Aplicamos diferencia de cuadrados: ……………………………………………………………………………………….

Finalmente, P(x) queda factoreado, y pueden observarse sus tres raíces racionales y el coeficiente principal

$$P(x) = 3.\left(x + \frac{1}{3}\right).(x - 2).(x + 2)$$

Trabajo Práctico N° 6: Polinomios. Factorización

1) Hallen la raíz en los siguientes polinomios de grado uno

a) $A(x) = x - 2$
b) $B(x) = 3x - 2$
c) $C(x) = -2x + 3$
d) $D(x) = 5x - \sqrt{2}$
e) $E(x) = -\frac{1}{3}x - 2$
f) $F(x) = -2x + \sqrt{3}$
g) $G(x) = \sqrt{5}x + 3$

2) Hallen las raíces en los siguientes polinomios de grado dos, siempre que sea posible

a) $A(x) = 2x^2 + 2x - 40$
b) $C(x) = \frac{1}{2}x^2 - \frac{3}{2}x - 14$
c) $D(x) = 10 + 3x - x^2$
d) $E(x) = -4x + x^2$
e) $F(x) = -2x^2 - 2x + 4$
f) $B(x) = 3x^2 + 3x - 60$

3) Hallen las raíces reales en los siguientes polinomios de la forma $P(x) = ax^n + b$

a) $A(x) = x^3 - 8$
b) $B(x) = 2x^3 + 16$
c) $C(x) = x^4 - 64$
d) $D(x) = 3x^3 + 81$
e) $E(x) = -x^5 + 32$
f) $F(x) = 2x^6 - 2$
g) $G(x) = 4x^2 - 16$
h) $H(x) = x^7 - 128$

4) Dados los siguientes polinomios escritos en forma factorizada, determinen el coeficiente principal, el grado y las raíces y su multiplicidad. En caso de que no sean reales, indiquen cuántas son:

a. $A(x) = 3\left(x - \frac{1}{2}\right)(x - 2)$
b. $B(x) = -2(x - 5)$
c. $C(x) = -7\left(x - \frac{1}{4}\right)\left(x - \sqrt{3}\right)^2(x^2 + 2)$
d. $D(x) = \frac{1}{2}(x - 2)(x + 1)^4$
e. $E(x) = \sqrt{3}\left(x - \frac{5}{3}\right)(x + 3)^3(x + \sqrt{2})^2$
f. $F(x) = 2x^2\left(x - \frac{4}{7}\right)(x + 2)^4(x + \sqrt{3})^2(x^2 + 6)$
g. $G(x) = -5x^3(x + 2)(x - 5)(x^2 + 3)(x - \sqrt{2})$

5) Escriban un polinomio que cumpla con las características que se piden en cada caso:

a) Que tenga grado seis, coeficiente principal negativo y sus únicas raíces sean x_1= -3; $x_2=\frac{1}{3}$ y x_3=0
b) Que tenga dos raíces no reales y grado cinco
c) Cuyo grado sea cuatro y que tenga dos raíces irracionales, dos enteras y una negativa
d) Que no tenga raíces reales

6) Encuentren las raíces en estos polinomios y exprésenlos en forma factorizada:

a) $A(x) = -2x + 3$
b) $B(x) = 5x - \sqrt{2}$
c) $C(x) = -\frac{1}{3}x - 2$
d) $D(x) = -2x + \sqrt{3}$
e) $E(x) = 2x^2 + 4x - 6$
f) $F(x) = 7x^2 + 6 + 17x$
g) $G(x) = 10 + 3x - x^2$
h) $H(x) = -4x + x^2$
i) $I(x) = -2x^2 - 2x + 4$

7) Factorear los siguientes polinomios aplicando el Teorema de Gauss:

$a)\ A(x) = x^3 - x - 2 + 2x^2$
$b)\ B(x) = x^4 - 3x^2 - 2x$
$c)\ C(x) = -2x^3 - 8x - x^2 - 4$
$d)\ D(x) = x^3 - 5x^2 + 8x - 4$
$e)\ E(x) = 2x^3 - 8x^2 - 14x + 20$
$f)\ F(x) = x^5 + 8x^4 - 3x^3 - 24x^2$
$g)\ G(x) = 2x^3 - 6x^2 - 18x + 54$
$h)\ H(x) = -2x^3 + 2x^2 + 18x - 18$
$i)\ I(x) = 2x^3 - 9x^2 + 10x - 3$
$j)\ J(x) = 4x^3 - 11x^2 + 10x - 3$
$k)\ K(x) = -2x^3 + 9x^2 + 6x - 5$

8) Encontrar el polinomio P(x) que cumpla las condiciones pedidas:

a) Tenga grado 4, sus raíces son 1,-1,2 y -3; y P(-2) = 5
b) Tenga grado 3, una raíz doble en 3, una simple en 2 y el término independiente sea 6.
c) Tenga grado 4, una raíz simple en 0 y -1, una raíz doble en -5 y P(4) = 810.
d) Tenga grado 3, el C.P. sea primo menor que 3, el T.I. sea 5 y P(1) = 11 y P(-1) = 1
e) Un polinomio de grado 2 con las mismas raíces que $P(x) = 2x^2 - 3x - 2$

9) Completar para que la proposición sea verdadera:

$a)\ P(-1) = 0 \Rightarrow P(x)\ es\ divible\ por$ ____________
$b)\ P(x)\ es\ divisible\ por\ (x+3)\ \Rightarrow P(-3) =$ _____
$c)\ P(2) = 0 \Rightarrow P(x)\ es\ múltiplo\ de$ ______________
$d)\ 4\ es\ raíz\ de\ P(x) \Rightarrow\ P(x)\ es\ divisible\ por$___________

10) Extraigan factor común en los siguientes polinomios:

a) $A(x) = 3x^2 + 6x$
b) $B(x) = 4x^4 + 2x^3 + 8x^5$
c) $C(w) = 9w^4 + 3w^3 - 18w$
d) $D(x) = -2x^3 + 5x^2$
e) $E(x) = 3x + 2$
f) $F(x) = -2x + 3$
g) $G(x) = -3x^2 - 9x$
h) $H(x) = 6x^4 - 5x^3 + 7x^2$
i) $I(x) = -6x + 12x^2 + 8x^4$
j) $J(x) = -10x^2 - 20$

11) Extraigan factor común y apliquen posteriormente otra estrategia para factorizar los siguientes polinomios:

a) $A(x) = 3x^2 - 12x$
b) $B(x) = 2x^3 + 3x^2$
c) $C(x) = 6x^4 + 5x^3$
d) $D(x) = 5x^3 + 5x^2 - 30x$
e) $E(x) = 2x^4 - 8x^3 - 10x^2$
f) $F(x) = 6x^6 + 30x^5 - 84x^4$
g) $G(x) = -2x^3 + 10x^2 + 48x$
h) $H(x) = -7x^5 + 5x^4 + x^3$
i) $I(x) = 2x^4 - 6x^3 + 4x^2$

12) Factorear aplicando diferencia de cuadrados:
a) $A(x) = x^2 - 4$
b) $B(x) = x^2 - 16$
c) $C(x) = x^2 - 36$
d) $D(x) = x^4 - 16$
e) $E(x) = x^4 - 64$
f) $F(x) = x^4 - 81$
g) $G(x) = x^4 - 16$

13) Completen para que se verifiquen las siguientes igualdades:

a) $(x + 11) \,.\, (\quad - \quad) = x^2 - 121$
b) $(\quad + \quad) \,.\, (x^2 - 3x^3) = x^4 - 9x^6$
c) $(8x + \quad) \,.\, (\quad - \quad) = 64x^2 - 100$
d) $(\quad + \quad) \,.\, (\quad - \quad) = x^8 - \frac{1}{4}$
e) $(x + 3).\, (\quad - \quad) = x^2 - 9$
f) $(\quad + \quad).\, (\quad - \quad) = x^6 - 25x^4$

14) Factorizar por completo los siguientes polinomios, partiendo de la técnica de factor común:

a) $A(x) = 3x^4 - 48x^2$
b) $B(x) = -3x^5 + 243x^3$
c) $C(x) = -6x^4 + 486$
d) $D(x) = 5x^7 - 125x^5$
e) $E(x) = 3x^7 - 12x^5$
f) $F(x) = 2x^5 - 32x$
g) $G(x) = -x^3 + 16x$
h) $H(x) = 3x^8 - 3x^2$

15) Apliquen factor común por grupos para comenzar a factorizar los siguientes polinomios:

a) $A(x) = x^3 - x^2 + x - 1$
b) $B(x) = 2x^3 - 6x^2 + x - 3$
c) $C(x) = 3x^5 + x^4 - 3x - 1$
d) $D(x) = 4x^3 + 8x^2 - 8x - 16$
e) $E(x) = x^6 - 9x^4 - 256x^2 + 2304$
f) $F(x) = 2x^6 - 2x^4 - 2x^2 + 2$
g) $G(x) = x^8 + x^6 - 64x^2 - 64$
h) $H(x) = x^{10} - x^6 - x^4 + 1$
i) $I(x) = x^6 + x^5 - 2x^4 + x^2 + x - 2$
j) $J(x) = -2x^8 + 12x^7 - 18x^6 + 2x^2 - 12x + 18$

16) Factorizar aplicando la combinación de las técnicas estudiadas hasta el momento:

a) $A(x) = x^4 - 2x^3 + x^2$
b) $B(x) = x^5 - x^3 - x^2 + 1$
c) $C(x) = 20x^2 - 20x + 5$
d) $D(x) = 5x^3 - 5x$
e) $E(x) = \frac{1}{2}x^2 - \frac{3}{2}x - 14$
f) $F(x) = x^3 + 5x^2 - 9x - 45$
g) $G(x) = \frac{1}{2}x^5 - 4x^4 + 8x^3$
h) $H(x) = 81x^7 - x^5$

17) Factorizar utilizando los datos proporcionados:

$H(x) = x^4 - 8x^2 - 9$ Sabiendo que x=3 es una de sus raíces.

R(x)= $x^4 + 2x^3 - 15x^2 - 32x - 16$, que tiene por raíz doble a x=-1
M(x)= $-x^3 - 9x^2 - 15x + 25$, que tiene por raíz a x= - 5
$Q(x) = 2x^5 + 6x^4 - 2x^3 - 22x^2 - 24x - 8$ Sabiendo que x=-1 es raíz múltiple

18) Hallar el valor de k:

a) $(x^4 - 5x + k) : (x - 1)\ \ con\ resto = 0$
b) $\left(x^3 - \frac{1}{3}x^2 - 2x + k\right) : (x + 3)\ con\ resto = -16$
c) $(x^3 - x^2 + kx - 10)\ si\ 2\ es\ raíz$

RESPUESTAS:

Ejercicio 1:

a) x=2 **b)** $x = \frac{2}{3}$ **c)** $x = \frac{3}{2}$ **d)** x=-6 **e)** $x = \frac{\sqrt{3}}{2}$

f) $x = -\frac{3\sqrt{5}}{5}$

Ejercicio 2:

a) $x = 4\,; x = -5$
b) $x = 7\,; x = -4$
c) $x = -2\,; x = 5$
d) $x = 0\,; x = 4$
e) $x = -2\,; x = 1$
f) $x = 4\,; x = -5$

Ejercicio 3:

a) $x = 2$
b) $x = -2$
c) $x = 8\,; x = -8$
d) $x = -3$
e) $x = 2$
f) $x = 1$
g) $x = 2\,; x = -2$
h) $x = 2$

Ejercicio 4:

C.P	Grado	Raíces
3	2	$x = \frac{1}{2}\,; x = 2$
-2	1	$x = 5$
-7	5	$x = \frac{1}{4}\,;\ \ x = \sqrt{3}\ doble\ \ ;\ 2\ no\ reales$
$\frac{1}{2}$	5	$x = 2\,; x = -1\ cuádruple$
$\sqrt{3}$	6	$x = \frac{5}{3};\ x = -3\ triple\ ;\ ; x = -\sqrt{2}$ doble
2	11	$x = 0\ doble\ ;\ x = \frac{4}{7};\ x = -2\ cuádruple\ ;\ ; x = -\sqrt{3}$ doble ; dos raíces no reales
-5	8	$x = 0\ triple\ ;\ x = -2\ \ ;\ ; x = 5$; 2 raíces no reales; $x = \sqrt{2}$

Ejercicio 6:

g) $A(x) = -2(x - \frac{3}{2})$
h) $B(x) = 5(x - \frac{\sqrt{2}}{5})$
i) $C(x) = -\frac{1}{3}(x + 6)$
j) $D(x) = -2(x - \frac{\sqrt{3}}{2})$
k) $E(x) = 2(x - 1).(x + 3)$
l) $F(x) = 7\left(x + \frac{3}{7}\right).(x + 2)$
m) $G(x) = -(x + 2).(x - 5)$
n) $H(x) = x.(x - 4)$
o) $I(x) = -2.(x + 2).(x - 1)$

Ejercicio 7:

$a)$ $A(x) = (x - 1).(x + 1)(x + 2)$

$b)$ $B(x) = x.(x + 1)(x - 2)$

$c)$ $C(x) = -2(x + \frac{1}{2})(x - 2).(x + 2)$

$d)$ $D(x) = (x - 2).(x - 1)^2$

$e)$ $E(x) = 2.(x - 5).(x - 1).(x + 2)$

$f)$ $F(x) = x^2.(x + \sqrt{3}).(x - \sqrt{3}).(x + 8)$

$g)$ $G(x) = 2(x + 3).(x - 3)^2$

$h)$ $H(x) = -2.(x - 3).(x + 3).(x - 1)$

$i)$ $I(x) = 2(x - 3).(x - 1).(x - \frac{1}{2})$

$j)$ $J(x) = 4.\left(x - \frac{3}{4}\right).(x - 1)^2$

$k)$ $K(x) = 2(x - 5).(x - 1).(x - \frac{1}{2})$

Ejercicio 8:

a) $A(x) = -\frac{5}{12}.(x - 1).(x + 1).(x - 2).(x - 3)$
b) $B(x) = \frac{1}{6}.(x - 3)^2.(x - 2)^2.$
c) $C(x) = \frac{1}{2}.x.(x + 1).(x + 5)^2$
d) $D(x) = 2x^3 + x^2 + 3x + 5$
e) $E(x) = 3.(x - 2).(x + \frac{1}{2})$

Ejercicio 9:

$a)$ $P(-1) = 0 \Rightarrow P(x)$ *es divible por* $(x + 1)$
$b)$ $P(x)$ *es divisible por* $(x + 3) \Rightarrow P(-3) = 0$
$c)$ $P(2) = 0 \Rightarrow P(x)$ *es múltiplo de* $(x - 2)$
$d)$ 4 *es raíz de* $P(x) \Rightarrow P(x)$ *es divisible por* $(x - 4)$

Ejercicio 10:

a) $A(x) = 3x.(x+2)$
b) $B(x) = 2x^3.(2x+1+4x^3)$
c) $C(w) = 3w.(3w^3+w^2-6)$
d) $D(x) = -2x.(x-\frac{5}{2})$
e) $E(x) = 3.(x+\frac{2}{3})$
f) $F(x) = -2.(x-\frac{3}{2})$
g) $G(x) = -3x.(x+3)$
h) $H(x) = 6x^2.(x^2-\frac{5}{6}x+\frac{7}{6})$
i) $I(x) = 2x.(-3+6x+4x^2)$
j) $J(x) = -10(x^2+2)$

Ejercicio 11:

a) $A(x) = 3x.(x-2).(x+2)$
b) $B(x) = 2x^2.(x+\frac{3}{2})$
c) $C(x) = 6x^3.(x+\frac{5}{6})$
d) $D(x) = x.(x-2).(x+3)$
e) $E(x) = 2x^2.(x-5).(x+1)$
f) $F(x) = 6x^4.(x-2).(x+7)$
g) $G(x) = -2x.(x-8).(x+3)$
h) $H(x) = x^3.(x-\frac{5+\sqrt{53}}{14}).(x-\frac{5-\sqrt{53}}{14})$
i) $I(x) = 2x^2.(x+2).(x-1)$

Ejercicio 12:

a) $A(x) = (x-2).(x+2)$
b) $B(x) = (x-4).(x+4)$
c) $C(x) = (x-6).(x+6)$
d) $D(x) = (x^2+4).(x-2).(x+2)$
e) $E(x) = (x^2+8).\left(x-2\sqrt{2}\right).(x+2\sqrt{2})$
f) $F(x) = (x^2+9).(x+3).(x-3)$
g) $G(x) = (x^2+4).(x-2).(x+2)$

Ejercicio 14:

h) $A(x) = 3x^2.(x-4).(x+4)$
i) $B(x) = -3x^2.(x-9).(x+9)$
j) $C(x) = -6.(x^2+9)(x-3).(x+3)$
k) $D(x) = 5x^5.(x-5).(x+5)$
l) $E(x) = 3x^5.(x-2).(x+2)$
m) $F(x) = 2x.(x^2+4)(x-2).(x+2).$
n) $G(x) = -x.(x-4).(x+4)$
o) $H(x) = 3x^2.(\mathrm{x}-1).(x^5+x^4+x^3+x^2+\mathrm{x}+1)$

Ejercicio 15:

a) $A(x) = (x^2 + 1).(x - 1)$
b) $B(x) = 2.\left(x^2 + \frac{1}{2}\right).(x - 3)$
c) $C(x) = 3.(x^2 + 1).(x - 1).(x + 1).(x + \frac{1}{3})$
d) $D(x) = 4.\left(x - \sqrt{2}\right).\left(x + \sqrt{2}\right).(x + 2)$
e) $E(x) = (x^2 + 16).(x + 4).(x - 4).(x + 3).(x - 3)$
f) $F(x) = 2.(x^2 + 1).(x + 1)^2.(x - 1)^2.$
g) $G(x) = (x - 2).(x^2 + 2x + 4).(x + 2).(x^2 - 2x + 4)(x^2 + 1)$
h) $H(x) = (x - 1)^2.(x + 1)^2.(x^2 + 1).(x^4 + x^2 + 1)$
i) $I(x) = (x^4 + 1).(x - 1).(x + 2)$
j) $J(x) = -2.(x^6 + 1).(x - 3)^2$

Ejercicio 16:

a) $A(x) = x^2.(x - 1)^2$
b) $B(x) = (x - 1)^2.(x^2 + x + 1).(x + 1)$
c) $C(x) = 20.(x - \frac{1}{2})^2$
d) $D(x) = 5x.(x - 1).(x + 1)$
e) $E(x) = \frac{1}{2}.(\mathrm{x} - 7).(\mathrm{x} + 4)$
f) $Q(x) = (x + 3).(x - 3).(x + 5)$
g) $S(x) = \frac{1}{2}x^3.(x - 4)^2$
h) $H(x) = 81x^5(x - \frac{1}{9})(x + \frac{1}{9})$

Ejercicio 17:

$H(x) = (x - 3).(x + 3).(x^2 + 1)$

$M(x) = -(x - 5).(x - 1).(x + 5)$

$Q(x) = (x + 1)^3.(x - 2).(x + 2)$

Ejercicio 18:

p) $k = 4$
q) $k = 1$
r) $k = 3$